Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Joana
Freitas da Costa

Teorema de Noether do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo na Economia

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

**Joana
Freitas da Costa**

Teorema de Noether do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo na Economia

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente Matemática acabem tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Na verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento mas sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o acto de atingir a meta.”

Carl Friedrich Gauss

o júri

Presidente

Prof. Dr. Vítor Manuel Carvalho das Neves
Professor Associado da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Manuel Cidrães Castro Guerra
Professor Auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

Prof. Dr. Delfim Fernando Marado Torres
Professor Associado da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, por todo o apoio que me deu na elaboração desta dissertação. O seu apoio científico e a sua visão prática foram muito importantes.

Igualmente, agradeço aos meus pais e ao Nuno pelo apoio e carinho, que tanto contribuíram para a elaboração desta dissertação.

Por fim, agradeço aos amigos que, pelas críticas feitas, tanto me ajudaram.

palavras-chave

Cálculo das Variações, Teorema de Noether, Controlo Óptimo, Teorema de Noether na Economia.

resumo

Da aplicação do Cálculo das Variações à Física surgiu, em 1915, na Universidade de Göttingen, pela mão de Emmy Noether, um resultado importante, conhecido por Teorema de Noether, que evidencia a relação entre as simetrias e os princípios de conservação. Começamos esta dissertação, no Capítulo 1, com a abordagem de algumas noções fundamentais do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo, quer para o caso contínuo, quer para o caso discreto. De seguida, no Capítulo 2, dedicamos a nossa atenção ao Teorema de Noether, formulando-o e demonstrando-o, sob o ponto de vista do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo, quer para o caso contínuo, quer para o caso discreto. Embora o Teorema de Noether tenha aparecido motivado pelas suas aplicações na Física, vamos no Capítulo 3 apresentar alguns exemplos de aplicação deste Teorema na Economia, sob duas vertentes: utilizando o Cálculo das Variações e o Controlo Óptimo. Por fim, concluímos a dissertação, referindo a bibliografia utilizada na sua preparação e elaborando um índice remissivo, onde salientamos os conceitos mais significativos e as palavras de relevo nesta dissertação.

keywords

Calculus of Variations, Optimal Control, Noether’s Theorem, Applications to Economy

abstract

In 1915, at the University of Göttingen, Emmy Noether proved a central result of the Calculus of Variations which explains the relation between the existence of symmetries and the existence of conservation principles in Physics. We begin, in Chapter 1, by introducing the fundamental notions of the Calculus of Variations and Optimal Control, both in the continuous and discrete cases. Then, in Chapter 2, we focus our attention on Noether's Theorem: we formulate and prove Noether's Theorem in the contexts of the Calculus of Variations and Optimal Control, in the continuous and discrete settings. Finally, in Chapter 3, we give some applications of Noether's Theorem to Economic problems. We finish the dissertation with some conclusions and by giving references to the works used in the preparation of the dissertation.

Conteúdo

Lista de Notações

Símbolo	Significado
$PC([a,b],\mathbb{R}^n)$	Conjunto de funções $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ contínuas por partes
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais a que pertence a variável independente
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de dimensão n que corresponde ao espaço de vectores $x=(x^1,\ldots,x^n)$, onde $x^i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ e ao espaço de vectores $\dot{x}=(\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$, onde $\dot{x}^i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$
C^2	Classe de funções duas vezes diferenciável com continuidade
x^i	Componente da variável de estado, x, onde $i=1,\ldots,n$
x_i	Variável de estado discretizada em N intervalos, $i=1,\ldots,N$
t	Variável de tempo contínua
t_i	Variável de tempo discretizada em N intervalos, $i=1,\ldots,N$
L_x	Derivada parcial de $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ em ordem ao segundo argumento
$L_{\dot{x}}$	Derivada parcial de $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ em ordem ao terceiro argumento
Δx_i	Diferença entre a variável x_{i+1} e a variável x_i
Δt_i	Diferença entre a variável t_{i+1} e a variável t_i. É igual à amplitude do intervalo temporal a dividir pelo número total, N, de intervalos.
$(x^i)^d$	Para que não se confundam índices com potências, utilizaremos parênteses curvos sempre que quisermos elevar a um expoente d a componente x^i de um vector x.
s_k	É uma componente de s (uma família com r parâmetros) cujo $k=1,\ldots,r$

Introdução

Historicamente o nascimento do Cálculo das Variações dá-se no ano de 1696, com a formulação por Johann Bernoulli do problema de Braquistócrona na "Acta Eruditorum Lipsiae". O problema consiste em determinar a trajectória de um ponto material, entre dois pontos fixos, P e Q, a que corresponda o tempo mínimo sob a acção única da força gravitacional:

$$T[x(\cdot)] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}}{\sqrt{x(t)}} dt \longrightarrow \min,$$

$$x(0) = x_0, \quad x(b) = x_b.$$

Dez anos antes, em 1686, Newton tinha considerado um problema similar: determinar uma curva $x(\cdot)$ que, por rotação em torno do seu eixo, gera um corpo que oferece resistência mínima quando em movimento num determinado meio raro,

$$R[x(\cdot)] = \int_0^T \frac{t}{1+(\dot{x}(t))^2} dt \longrightarrow \min,$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = H,$$

com $H > 0$ dado.

Outro problema clássico, da mesma família, consiste em determinar a curva $x = x(t)$ que rodando em torno do eixo Ot gera um corpo com área de superfície mínima:

$$A[x(\cdot)] = \int_a^b x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)} dt \longrightarrow \min,$$

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b.$$

O Cálculo das Variações, e a sua face moderna, o chamado Controlo Óptimo, fornece as ferramentas matemáticas necessárias ao estudo de problemas deste tipo.

O primeiro livro de texto sobre o Cálculo das Variações deve-se a Leonhard Euler, tem como título "*Methodus inveniendi: lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*" e foi publicado em 1711. Neste livro Euler trata, de modo profundo, questões difíceis, tais como problemas variacionais sujeitos a restrições descritas por equações diferenciais. Em dois apêndices, ele estudou as cordas elásticas e deu o primeiro tratamento matemático satisfatório ao princípio da acção mínima.

Em 1755, Lagrange desenvolveu um método que permitiu obter a famosa Equação de Euler, que é a condição necessária por excelência do Cálculo das Variações, utilizando apenas argumentos da Análise Matemática.

Legendre, em 1788, investigou pela primeira vez e de forma sistemática a questão das condições suficientes. O seu estudo, conforme notou Lagrange em 1797, continha erros. No entanto, as ideias de Legendre influenciaram Jacobi, que elaborou o estudo de condições suficientes para o Cálculo das Variações em 1837. Num pequeno artigo, Jacobi esboçou a célebre teoria dos pontos conjugados.

Em 1879, Weierstrass descobriu que a propriedade de ser mínimo pode ser caracterizada utilizando um método conhecido por Teoria dos Campos de Weierstrass. Este método foi desenvolvido mais tarde por A. Mayer, A. Kneser, D. Hilbert e C. Carathéodory.

Desde então, o Cálculo das Variações repartiu-se por vários ramos. O Cálculo das Variações foi crescendo em importância e continua extremamente vivo, hoje em dia, em pleno século XXI, tendo inúmeras aplicações práticas: na mecânica, economia, ciências dos materiais, ciências do espaço e engenharia. Foi precisamente a partir da aplicação do Cálculo das Variações à Física que Emmy Amalie Noether chegou ao famoso Teorema de Noether.

Emmy Amalie Noether nasceu a 23 de Março de 1882 em Erlangen - Bavaria - Alemanha e morreu a 14 de Abril de 1935 em Bryn Mawr - Pensilvânia -Estados Unidos da América. Esta matemática, de origem judaica, é a mais velha de quatro irmãos. O pai, Max Noether, foi um distinto matemático, professor em Erlangen. A sua mãe, Ida Kaufmann, era de família abastada. Emmy Noether frequentou o Höhere Töchter Schule, em Erlangen, de 1889 a 1897. Estudou Alemão, Inglês, Francês, aritmética e dava aulas de piano. O seu sonho, nessa altura, era tornar-se professora de Línguas, razão porque fez o exame do Estado da Bavaria, em 1900, tornando-se professora certificada de Inglês e Francês, no colégio de raparigas da Bavaria. Contudo Noether nunca se tornou em definitivo professora de Línguas. Em vez disso, preferiu tomar o caminho mais difícil para uma mulher do seu tempo, estudando matemática na universidade. Naquela época, as mulheres para estudarem nas universidades alemãs precisavam de pedir permissão ao professor da disciplina e, no caso de ela ser concedida, estudavam de forma não oficial. Noether obteve permissão para assistir a disciplinas de Matemática na Universidade de Erlangen de 1900 a 1902. Depois, passou no exame de matrícula de Nürnberg em 1903 e entrou na Universidade de Göttingen. De 1903 a 1904, ela teve oportunidade de ler trabalhos de Blumenthal, Hilbert, Klein e Minkowski. Em 1904 Noether obteve permissão para se matricular em Erlangen e em 1907 foi-lhe concedido o grau de doutor depois de ter trabalhado sob a orientação de Paul Gordan.

Em 1888, Hilbert tinha demonstrado um resultado de invariância. Paul Gordan usou métodos construtivos para chegar aos mesmos resultados. A tese de doutoramento de Noether seguiu esta aproximação construtiva de Gordan e registou sistemas de 331 formas covariantes.

Com o doutoramento completo, a progressão normal numa carreira universitária seria a agregação. Contudo, a carreira não estava aberta a mulheres e Noether permaneceu em Erlangen, ajudando o pai e trabalhando nas suas próprias investigações, influenciada por Fischer, que sucedeu Gordan, na Universidade, em 1911. Esta influência levou Noether a prestar atenção à abordagem abstracta de Hilbert e a deixar a abordagem construtiva de Gordan.

A reputação de Noether cresceu rapidamente e começaram a aparecer as suas primeiras publicações. Em 1908 foi eleita para o *Circolo Matematico di Palermo*. Em 1909 foi convidada para membro da *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. Ainda em 1909 foi convidada para a reunião anual da *Society in Salzburg*. Em 1913 deu uma palestra em Viena.

Em 1915 Hilbert e Klein convidaram Noether a voltar para Göttingen. Eles persuadiram-na a permanecer em Göttingen enquanto travavam uma batalha para conseguir a agregação de Noether na Faculdade. Esta batalha durou até 1919. Durante esse tempo Hilbert permitiu que Noether leccionasse cursos usando o seu nome. Por exemplo, um curso dado no semestre de Inverno de 1916/17 apareceu anunciado como:

> *Mathematical Physics Seminar: Professor Hilbert, com a assistência da Dr. E. Noether, Segundas das 4 ás 6,grátis.*

O primeiro trabalho de Emmy Noether, após o seu regresso a Göttingen em 1915, é um resultado famoso em Física teórica, conhecido como Teorema de Noether, que prova a relação entre a existência de simetrias e os princípios de conservação na Física. Este resultado foi importante na teoria da relatividade de Einstein. A teoria da invariância de Noether permitiu a Einstein algumas formulações e teorizar inúmeros conceitos.

Em Göttingen, depois de 1919, Noether deixou a teoria da invariância e passou a trabalhar numa teoria mais abstracta, que ajudou a desenvolver a teoria dos anéis e a álgebra moderna.

Noether continuou a investigar e a ensinar enquanto colaborava com colegas e estudantes. Esta é a razão porque muito do seu trabalho aparece escrito por colegas e estudantes.

Em 1933, os arquivos matemáticos de Noether foram destruídos pelos Nazis devido à sua origem judaica. Nessa altura emigrou para os Estados Unidos da América, dedicando-se ao ensino.

Embora Noether tenha formulado o seu teorema aplicado à Física, ele tem aplicação noutras áreas. O objectivo desta dissertação é explorar um pouco a aplicação do Teorema de Noether à Economia.

O estudo das leis de conservação na Economia é uma área de interesse actual e, parece-nos, tem registado grandes progressos nos últimos tempos. Vamos abordá-la, segundo [12], sob duas vertentes:

1. Teorema de Noether para modelos dinâmicos contínuos.

2. Modelos económicos discretos.

Como o Cálculo das Variações está na origem de outras áreas mais recentes, como sejam a Análise Funcional e o Controlo Óptimo, optámos também por fazer uma abordagem do Teorema de Noether no Controlo Óptimo, aplicado à Economia.

Capítulo 1

Cálculo das Variações e Controlo Óptimo

1.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é a apresentação das noções do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo que serão necessárias ao longo do trabalho.

A data do início do Cálculo das Variações é incerta, é costume fixá-la nos finais de 1600. Contudo, o objecto do seu estudo, encontrar os minimizantes para funcionais do tipo

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right]=\int\limits_{a}^{b}F\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)dt\,,$$

onde $x:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^{n}$, $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ e $\dot{x}\left(t\right)=\frac{dx(t)}{dt}$ esse não oferece dúvidas.

Nos primeiros dois séculos da história do Cálculo das Variações, a filosofia que prevaleceu baseou-se na ideia de que todo o problema de minimização tem uma solução. Para determinar essa solução, procuraram-se estabelecer condições necessárias. Por exemplo, se $J:C\rightarrow\mathbb{R}$ for uma funcional diferenciável definida em alguma classe C de funções $x(\cdot)$, a condição necessária para $x(\cdot)$ ser "ponto" de mínimo é que a "derivada" de J em $x(\cdot)$ tem de ser nula. Esta ideia conduz-nos a uma equação diferencial, chamada equação de Euler-Lagrange, que deve ser satisfeita para a função $x\left(t\right)$, $t\in[a,b]$, que minimiza J.

Uma análise às condições necessárias permite obter os candidatos a mínimos e eventualmente identificar a solução. Se, de alguma forma, existir uma solução única da equação de Euler-Lagrange que satisfaça as condições de fronteira impostas, somos levados a intuir que esta solução também é solução do problema minimizado. Esta conclusão foi questionada por Gauss, Steiner, Lord Kelvin, Dirichlet e Riemann e a verdade é que basta que o problema a minimizar não tenha solução para que a conclusão acima esteja errada. Por outras palavras, é necessário provar a existência de mínimo antes de concluir que a solução da equação de Euler-Lagrange é minimizante.

Este assunto é ainda mais complicado: é necessário assegurar a regularidade do minimizante, por exemplo, assegurar que o minimizante seja de classe C^2. A questão da regularidade dos minimizantes não é fácil, sendo, ainda hoje, uma matéria de investigação. Se existirem muitos candidatos a minimizante, qual ou quais deles será o minimizante (relativo ou absoluto)? A Teoria de Jacobi sobre pontos conjugados levou a condições suficientes para uma extremal (solução da equação de Euler-Lagrange) ser um minimizante fraco. Para além desta teoria e combinando-a com a teoria de campos de Weierstrass, conseguimos obter condições suficientes para uma extremal ser um minimizante forte.

Os problemas de optimização têm uma muito longa história. Obviamente, ao nível intuitivo, o ser humano sempre tentou optimizar tudo o que o ajudasse a viver melhor. Contudo, a optimização como ciência, como parte integrante da matemática, nasceu na Grécia Antiga. Os cientistas daquela época colocaram e resolveram (às vezes de uma forma pouco rigorosa) muitos problemas de optimização. No entanto, as ideias e métodos gerais de resolução destes problemas só apareceram no século XVII. A primeira contribuição importante neste campo foi feita por Kepler. Em 1615 foi publicada a sua obra fundamental *"Estereometria nova das pipas de vinho"*, onde ele apresentou métodos de resolução de problemas de optimização e desenvolveu alguns elementos do cálculo diferencial e integral.

1.2 Cálculo das Variações

1.2.1 Caso Contínuo

Na introdução deste trabalho referimos o Problema de Braquistócrona que é um exemplo do Problema Elementar do Cálculo das Variações. A forma geral deste problema é a seguinte:

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \to \min, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x(\cdot) \in C^2\left([a,b]; \mathbb{R}^n\right) \tag{1.2.1}$$

onde supomos $a < b$, A e B pertencem a $\mathbb{R}^n$ e $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ é duas vezes diferenciável com continuidade em relação a todos os argumentos: $L(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2$. O estado do sistema no tempo t é descrito por $x = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$.

Definição 1. Uma função $v \in C^2\left([a,b], \mathbb{R}^n\right)$ diz-se *mínimo local fraco* do problema (1.2.1) se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $J[v(\cdot)] \leq J[x(\cdot)]$ sempre que $\quad x(\cdot) \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$ e

$$\max_{t\in[a,b]} \left|x(t) - v(t)\right| + \max_{t\in[a,b]} \left|\dot{x}(t) - \dot{v}(t)\right| < \varepsilon\,.$$

Definição 2. Uma função $v \in C^2\left([a,b], \mathbb{R}^n\right)$ diz-se *mínimo local forte* do problema (1.2.1) se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $J[v(\cdot)] \leq J[x(\cdot)]$ sempre que $\quad x(\cdot) \in C^2\left([a,b], \mathbb{R}^n\right), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$ e

$$\max_{t\in[a,b]} \left|x(t) - v(t)\right| < \varepsilon\,.$$

Existem vários teoremas que ajudam a identificar candidatos a minimizante (ou maximizante) depois de confirmada a existência de solução desse problema.

Se para uma função, a funcional atinge o seu mínimo, então essa função verifica as chamadas *condições necessárias*.

Existem também teoremas chamados de *condições suficientes*. Esses teoremas têm a forma: se uma determinada função verifica uma dada condição, então essa função é minimizante.

Consideremos então o problema (1.2.1). No que se segue supomos que a função L e as suas derivadas parciais L_x e $L_{\dot{x}}$ são contínuas. O Teorema 1 dá-nos uma condição necessária para mínimo local fraco. Para o demonstrarmos usamos o lema seguinte que pertence a Lagrange.

Lema 1 (*Lagrange*)**.** *Seja $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_a^b l\,(t) \cdot x\,(t)\,dt = 0$ para todas as funções $x(\cdot) \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ com $x(a) = x(b) = 0$. Então $l(t) = 0$, $\forall t \in [a,b]$.*

Demonstração. Suponhamos que $l(\tau) > 0$ (o caso $l(\tau) < 0$ é tratado analogamente) num ponto $\tau \in [a,b]$. Como $l(\cdot)$ é contínua, existe um intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tal que $l(t) > c > 0$, $t \in [\alpha,\beta]$. Consideremos a função

$$x\,(t) = \begin{cases} (t-\alpha)^2\,(t-\beta)^2\,,\ t \in [\alpha,\beta]\,, \\ 0,\ t \notin [\alpha,\beta]\,. \end{cases}$$

Temos que $x(\cdot) \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ com $x(a) = x(b) = 0$. Portanto,

$$0 = \int_a^b l(t) \cdot x(t)dt > c\int_\alpha^\beta x\,(t)\,dt > 0$$

o que é uma contradição. □

Teorema 1. *Suponhamos que a função $v(\cdot) \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ dá um mínimo local fraco à funcional J e que a função $t \to L_{\dot{x}}\,(t, v\,(t)\,, \dot{v}\,(t))$ é continuamente diferenciável em $[a,b]$. Então $v(t)$ verifica a* equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\,(t, v\,(t)\,, \dot{v}\,(t)) - L_x\,(t, v\,(t)\,, \dot{v}\,(t)) = 0. \tag{1.2.2}$$

Demonstração. Seja $x(\cdot) \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ uma função que verifica $x(a) = x(b) = 0$. Consideremos a função

$$\phi\,(\alpha) = J\,(v\,(t) + \alpha x\,(t))\,, \quad t \in [a,b].$$

A função $\alpha \to L\,(t, v\,(t) + \alpha x\,(t)\,, \dot{v}\,(t) + \alpha\dot{x}\,(t))$ é continuamente diferenciável. Pelo teorema de diferenciabilidade do integral paramétrico (vide [13] pg.202) a função $\phi(\alpha)$ é diferenciável. Como a funcional J tem um mínimo local em $v(\cdot)$ e $v(a) + \alpha x(a) = A$ e $v(b) + \alpha x(b) = B$, a função $\phi(\alpha)$ tem um mínimo local no ponto $\alpha = 0$. Logo

$$0 = \phi'\,(0) = \int_a^b \left(\hat{L}_x\,(t)\,x\,(t) + \hat{L}_{\dot{x}}\,(t)\,\dot{x}\,(t)\right)dx, \tag{1.2.3}$$

onde $\hat{L}_x(t) = L_x(t, v(t), \dot{v}(t))$ e $\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, v(t), \dot{v}(t))$. Como a função $\hat{L}_{\dot{x}}(t)$ é continuamente diferenciável e $x(a) = x(b) = 0$, integrando por partes o segundo termo em (1.2.3), temos

$$0 = \hat{L}_{\dot{x}}(t)\, x(t)\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \left(\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)\right) x(t)\, dt = \int_a^b \left(\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)\right) x(t)\, dt$$

sempre que $x(\cdot) \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ e $x(a) = x(b) = 0$. Aplicando o Lema de Lagrange, Lema 1, obtemos o sistema de equações de Euler-Lagrange (1.2.2):

$$\hat{L}_{x^i}(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}^i}(t) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

□

Definição 3. Às soluções da equação de Euler-Lagrange (1.2.2) chamamos *extremais*.

A equação de Euler-Lagrange (1.2.2) é uma equação diferencial de segunda ordem. A solução geral desta equação $x(t, c_1, c_2)$ contém duas constantes c_1 e c_2. Para encontrar estas constantes utilizam-se as condições nos extremos do intervalo $[a, b] : x(a) = A$ e $x(b) = B$. Assim temos um conjunto completo de condições para encontrar a função $v(\cdot)$:

$$x(a, c_1, c_2) = A,$$
$$x(b, c_1, c_2) = B$$

(duas incógnitas, duas equações).

Consideremos alguns exemplos do problema elementar do Cálculo das Variações:

Exemplo 1. Obviamente um mínimo local forte é um mínimo local fraco. No entanto, um mínimo local fraco pode não ser um mínimo local forte. Consideremos

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x \in C^2([0,1],\mathbb{R})$$

onde $\quad L(t, x, \dot{x}) = (\dot{x})^3$.

Utilizando (1.2.2) podemos dizer que a equação de Euler-Lagrange fica definida por $\dot{x}(t) = 0$ ou $\ddot{x}(t) = 0$. A extremal tem a forma $x(t) = c_1 t + c_2$. Das condições $x(0) = 0$ e

$x(1) = 1$ encontramos as constantes:

$$\begin{cases} x(0) = c_2 \\ x(1) = c_1 + c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Portanto $v(t) = t$ é a única função que verifica a condição necessária de Euler-Lagrange.

Seja $x(\cdot) \in C^2([0,1])$ uma função que verifica as condições $x(0) = x(1) = 0$. Temos então:

$$\begin{aligned} J\left[v\left(\cdot\right)+x\left(\cdot\right)\right] &= \int_0^1 \left(\dot{v}+\dot{x}\right)^3 dt = \\ &= \int_0^1 \left((\dot{v})^3 + 3(\dot{v})^2\dot{x} + 3\dot{v}(\dot{x})^2 + (\dot{x})^3\right) dt = \\ &= J\left[v\left(\cdot\right)\right] + \int_0^1 3(\dot{v})^2\dot{x}dt + \int_0^1 \left(\dot{x}\right)^2\left(3\dot{v}+\dot{x}\right) dt \end{aligned}$$

Integrando o termo $\int_0^1 3(\dot{v})^2\dot{x}dt$ por partes, obtemos

$$\begin{aligned} J\left[v\left(\cdot\right)+x\left(\cdot\right)\right] &= J\left[v\left(\cdot\right)\right] - \int_0^1 6\ddot{v}\dot{v}xdt + \int_0^1 \left(\dot{x}\right)^2\left(3\dot{v}+\dot{x}\right) dt \\ &= J\left[v\left(\cdot\right)\right] + \int_0^1 \left(\dot{x}\right)^2\left(3\dot{v}+\dot{x}\right) dt = J\left[v\left(\cdot\right)\right] + \int_0^1 \left(\dot{x}\right)^2\left(3+\dot{x}\right) dt \end{aligned}$$

porque v verifica $\dot{v}(t) = 1$ e $\ddot{v}(t) = 0$. Temos, portanto,

$$J[v(\cdot) + x(\cdot)] \geq J[v(\cdot)]$$

sempre que o valor

$$\max_{t\in[0,1]} \left|x\left(t\right)\right| + \max_{t\in[0,1]} \left|\dot{x}\left(t\right)\right|$$

é bastante pequeno. Por outro lado a função $v(\cdot)$ não dá mínimo forte à funcional.

Com efeito, consideremos a sucessão de funções

$$x_n\left(t\right) = \int_0^t g_n\left(s\right) ds, \quad n \geqslant 2,$$

onde

$$g_n\left(t\right) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[, \\ 0, & t \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}\right], \\ \dfrac{2}{\sqrt{n}}, & t \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

É fácil de ver que $x_n(0) = x_n(1) = 0$ e

$$\begin{aligned} J\left[v\left(\cdot\right) + x_n\left(\cdot\right)\right] &= 1 + 3\int_0^1 g_n dt + 3\int_0^1 (g_n)^2 dt + \int_0^1 (g_n)^3 dt \\ &= 1 + \int_0^{\frac{1}{n}} \left(-3\sqrt{n} + 3n - n^{\frac{3}{2}}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{6\sqrt{n}}{n} + \frac{12}{n} + \frac{8}{n\sqrt{n}}\right) dt \\ &= 4 - \sqrt{n} + \frac{6}{n} + \frac{4}{n\sqrt{n}} \to -\infty \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.

Exemplo 2. **Problema sem solução.** Este problema deve-se a Weierstrass. Para o problema

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right] = \int_0^1 t^2 (\dot{x}\left(t\right))^2 dt \to \min , x\left(0\right) = 0 , x\left(1\right) = 1$$

a equação de Euler-Lagrange é $\frac{d}{dt}(2t^2\dot{x}) = 0$. A solução geral desta equação para $t \neq 0$ é $x(t) = -\frac{c_1}{2t} + c_2$. Não há nenhuma extremal que verifique simultaneamente as condições $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$.

É fácil de ver que $J[x(\cdot)] \geq 0$. Mostremos que o ínfimo de J é igual a zero. De facto, fazendo

$$x_n\left(t\right) = \begin{cases} nt, \ t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 1, \ t \in \left]\dfrac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

temos

$$J\left[x_n\left(\cdot\right)\right] = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t^2 dt = \frac{1}{3n} \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty\,.$$

Exemplo 3. **A função dada pelas condições necessárias pode não ser a solução - Paradoxo de Perron.**

Consideremos o problema

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right] = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left((\dot{x}\left(t\right))^2 - (x\left(t\right))^2\right) dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

A equação de Euler-Lagrange é $\ddot{x} + x = 0$. A solução geral desta equação é $x(t) = c_1 sent + c_2 cost$. Portanto a única função admissível que verifica as condições necessárias é $v(t) = 0$, com $J[v(\cdot)] = 0$. Consideremos a sucessão de funções $x_n(t) = \left(\frac{1}{n}\right) sen\left(\frac{2t}{3}\right)$. É fácil de ver que $x_n(0) = x_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ e

$$\max_{t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]} |x_n(t)| + \max_{t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]} |\dot{x}_n(t)| \to 0$$

mas

$$J[x_n(\cdot)] = -\frac{5\pi}{12n^2} < 0 = J[v(\cdot)].$$

Deste exemplo vemos que só faz sentido usar a equação de Euler-Lagrange em problemas que admitem solução (reparar que o Teorema 1 pressupõe a existência de minimizante).

Exemplo 4. **A solução não é continuamente diferenciável.** Este exemplo deve-se a Hilbert. Para o problema

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}(\dot{x}(t))^2 \to \min, x(0) = 0, x(1) = 1$$

a equação de Euler-Lagrange é $\frac{d}{dt}(2t^{\frac{2}{3}}\dot{x}) = 0$. A solução geral desta equação é $x(t) = \frac{3}{2}c_1 t^{\frac{1}{3}} + c_2$. Portanto a única função que verifica as condições necessárias é $v(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Esta função não é de classe C^1 mas é solução do problema. Com efeito tem-se

$$J[v(\cdot) + x(\cdot)] = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}\left(\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{3} + \dot{x}\right)^2 dt = J[v(\cdot)] + \left(\frac{2}{3}\right)\int_0^1 \dot{x}dt + \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}(\dot{x})^2 dt \geqslant J[v(\cdot)]$$

para toda a função $x(\cdot)$ continuamente diferenciável que verifica $x(0) = x(1) = 0$.

No problema (1.2.1) foi utilizado o símbolo "$\to min$"com o significado que se pretende encontrar o(s) minimizante(s) da funcional. No entanto, também poderá aparecer associado a este problema os símbolos "$\to max$"e "$\to ext$". O primeiro significa que se pretende encontrar o(s) maximizante(s) da funcional e o segundo que se pretende encontrar o(s) extremantes, ou seja, os minimizantes e/ou os maximizantes.

No capítulo 3 serão dados exemplos da aplicação do Cálculo das Variações na Economia.

1.2.2 Caso Discreto

O problema variacional (1.2.1) pode ser visto como um caso limite de um problema extremal em dimensão finita. Este problema extremal é resolvido por métodos ordinários do Cálculo, que ao passar ao limite leva à solução do problema original. Com efeito, a funcional $J[x(\cdot)]$ pode ser vista como uma função que depende de um número infinito de variáveis. Esta afirmação torna-se clara se assumirmos que as funções admissíveis $x(\cdot)$ podem ser expandidas numa série da forma

$$x\left(t\right)=\sum_{N=0}^{\infty}a_{N}\varphi_{N}\left(t\right) \tag{1.2.4}$$

onde $\varphi_N(t)$ são funções dadas. Para especificar a função $x(t)$ que é representada na série (1.2.4), é suficiente dar os valores aos coeficientes a_N, e por isso, o valor da funcional $J[x(\cdot)]$ será dado pela sucessão $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, \ldots$; isto é, a funcional é função de um número infinito de variáveis:

$$J[x(\cdot)]=\varphi(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_N,\ldots)$$

De uma maneira simplista, a diferença entre problemas variacionais e problemas extremais de funções com um número finito de variáveis é que no caso variacional temos de investigar os extremos de funções com um número infinito de variáveis. Esta foi a ideia original de Euler: olhar para o problema variacional como um caso limite do problema extremal de funções de um número finito de variáveis.

O método de Euler, agora conhecido como o método directo das diferenças finitas, esteve esquecido durante muito tempo. Nas últimas três décadas voltou a ser usado no trabalho de vários matemáticos, devido à facilidade da sua implementação computacional.

Método de Euler das Diferenças Finitas.

Consideremos a funcional:

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right]=\int_{t_0}^{t_1}L\left(t,x,\dot{x}\right)dt,\quad x(t_0)=a,\quad x(t_1)=b,\quad x\in C^2$$

Neste método, o valor da funcional não é considerado em curvas arbitrárias, mas em curvas poligonais dadas por um número N de segmentos de recta cujos vértices correspondem a determinadas abcissas: $t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \ldots, t_0+(N-1)\Delta t$ onde $\Delta t=\frac{t_1-t_0}{N}$.

Toda a função de classe C^2 pode ser aproximada por estas curvas poligonais.

Nas curvas poligonais, a funcional $J[x(\cdot)]$ é transformada numa função $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ de ordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ com vértices na curva poligonal desde que a curva esteja completamente definida por essas ordenadas.

Escolhemos as ordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ que dão um ponto crítico à função $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$, ou seja, determinamos as ordenadas pelo sistema de equações $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \ldots$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{N-1}} = 0$. Esperamos, no limite, quando $N \to \infty$, obter a solução do problema variacional.

Usando a aproximação das funções admissíveis por uma curva poligonal, temos:

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x, \dot{x}\right) dt \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0+k\Delta t}^{t_0+(k+1)\Delta t} L\left(t, x, \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}\right) dt.$$

Usando agora a aproximação por somas de Riemann obtemos:

$$J\left[x\left(\cdot\right)\right] \approx \sum_{i=0}^{N-1} L\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) \Delta t.$$

Encontrámos o Problema discreto do Cálculo das Variações, onde Δt é fixo.

Definição 4 (Problema do Cálculo das Variações Discreto)**.**

$$J(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} L\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right) \Delta t \longrightarrow ext \tag{1.2.5}$$

onde N é um número inteiro positivo fixo, t_i é a variável discreta com $i = 0, \ldots, N$, $x_i = x(t_i) \in \mathbb{R}^n$ e x_0 e x_N são dados.

Note-se que uma vez que Δt é uma constante, podemos eliminá-la de (1.2.5) e definir o problema discreto do Cálculo das Variações como:

$$J(x_1, \ldots, x_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} F\left(t_i, x_i, \Delta x_i\right) \longrightarrow ext\,,$$

onde x_0 e x_N são dados.

Vamos agora encontrar as equações discretas de Euler-Lagrange. Para isso precisamos das equações $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ da função

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} L\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right) \Delta t$$

Uma vez que para $i = 1, \ldots, N-1$ os termos i e $i-1$ dependem de x_i,

$$L\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right)\Delta t \quad e \quad L\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\Delta t\,,$$

apenas x_0 e x_N (que são conhecidos) aparecem uma única vez na soma. Segue-se que as equações $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1)$ tomam a forma:

$$\begin{aligned} L_x\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right)\Delta t + L_{\dot{x}}\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right)\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\Delta t \\ + L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\Delta t = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \end{aligned}$$

equivalente a

$$L_x\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) - \frac{L_{\dot{x}}\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) - L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = 0. \tag{1.2.6}$$

Chamamos equação de Euler-Lagrange discreta à condição necessária (1.2.6) para o problema (1.2.5).

Definição 5 (Equação de Euler-Lagrange discreta)**.** Para todo o $i = 1, \ldots, N-1$,

$$L_x\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) - \frac{\Delta L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = 0\,. \tag{1.2.7}$$

Observação 1. Quando $n \to \infty$, obtemos da *equação de Euler-Lagrange discreta* (1.2.7) a equação de Euler-Lagrange no caso contínuo (1.2.2):

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0.$$

1.3 Controlo Óptimo

Neste capítulo vamos formular o problema do Controlo Óptimo e a condição necessária conhecida como Princípio do Máximo de Pontryagin.

1.3.1 Caso Contínuo

O problema do Controlo Óptimo na forma de Lagrange é uma generalização do problema do Cálculo das Variações.

Definição 6 (*Problema de Lagrange do Controlo Óptimo*)**.** O problema do Controlo Óptimo é definido como se segue:

$$J\left[x\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right)\right]=\int_a^b L\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)dt\to\min \tag{1.3.1}$$

onde $x(\cdot)\in PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ e $u(\cdot)\in PC([a,b],\Omega\subseteq\mathbb{R}^m)$, sujeito ao sistema dinâmico de controlo

$$\dot{x}\left(t\right)=\varphi\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right),\quad \forall t\in\left[a,b\right], \tag{1.3.2}$$

onde $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ são funções de classe C^2, satisfazendo as condições de fronteira $x(a)=A$ e $x(b)=B$.

O teorema seguinte é a condição necessária de optimalidade central da teoria do Controlo Óptimo quando aplicada ao problema (1.3.1)-(1.3.2).

Teorema 2 (*Princípio do Máximo de Pontryagin* [10])**.** *Seja $(x(\cdot),u(\cdot))$ um minimizante do problema do Controlo Óptimo (1.3.1)-(1.3.2). Então existe um par $(\psi_0,\psi(\cdot))$ não nulo, onde $\psi_0\leq 0$ é uma constante e $\psi(\cdot)$ uma função pertencente a $PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, de modo que $\left(x\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right),\psi_0,\psi\left(\cdot\right)\right)$ satisfaz, em quase todo o $t\in[a,b]$, as seguintes condições:*

1. *o sistema Hamiltoniano*

$$\begin{cases}\dot{x}\left(t\right)=\dfrac{\partial H\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right),\psi_0,\psi\left(t\right)\right)}{\partial\psi}\\ \dot{\psi}\left(t\right)=-\dfrac{\partial H\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right),\psi_0,\psi\left(t\right)\right)}{\partial x}\end{cases} \tag{1.3.3}$$

2. *a condição de máximo*

$$H\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right),\psi_0,\psi\left(t\right)\right)=\max_{v\in\Omega}H\left(t,x\left(t\right),v,\psi_0,\psi\left(t\right)\right) \tag{1.3.4}$$

onde o Hamiltoniano*, H, é definido por* $H(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi\varphi(t, x, u)$*.*

Definição 7. O quadruplo $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ que satisfaz o sistema Hamiltoniano e a condição de máximo é chamado de *extremal de Pontryagin*.

Quando $\psi_0 = 0$, a extremal diz-se anormal.

Quando $\psi_0 < 0$, a extremal diz-se normal.

Observação 2. As extremais anormais existem e ocorrem frequentemente para o problema do Controlo Óptimo. No entanto, para o problema elementar do Cálculo das Variações não existem extremais anormais. Vamos demonstrar esta afirmação para o caso contínuo (demonstração análoga para o caso discreto).

Consideramos o problema do Cálculo das Variações (1.2.1) e observemos que ele é facilmente escrito como um problema do Controlo Óptimo (1.3.1)-(1.3.2) fazendo $\varphi(t, x, u) = u$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ ($m = n$, $\dot{x}(t) = u(t)$ e não existem restrições para $u(t)$). Assim o Hamiltoniano é dado por $H(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi u$. A condição de máximo (1.3.4) implica que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, ou seja,

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u} + \psi = 0 \Leftrightarrow \psi = -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u} \, .$$

Sabemos, pelo Princípio do Máximo de Pontryagin, que os multiplicadores ψ e ψ_0 não podem ser todos nulos. Por redução ao absurdo, admitamos que $\psi_0 = 0$. Então, $\psi = 0$ o que contraria o Princípio do Máximo de Pontryagin.

No capítulo 3 serão dados exemplos da aplicação do Controlo Óptimo à Economia.

1.3.2 Caso Discreto

Vamos considerar o problema discreto de Lagrange do Controlo Óptimo:

Definição 8 (*Problema discreto do Controlo Óptimo*)**.** Seja t_i uma variável discreta, $i = 0, \ldots, N-1$, onde N é um inteiro fixo. Consideramos a sequência de controlos $u(t_i) \in \Omega \subseteq$

$\mathbb{R}^m$, $i = 0, \ldots, N-1$ e a correspondente sequência de estados $x(t_i) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, N$ que minimiza ou maximiza a soma

$$J\left(x_0, \ldots, x_{N-1}, u_0, \ldots, u_{N-1}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} L\left(t_i, x_i, u_i\right) \tag{1.3.5}$$

sujeita ao sistema de controlo discreto

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \varphi\left(t_i, x_i, u_i\right), \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{1.3.6}$$

e às condições de fronteira

$$x(0) = x_0, \quad x(N) = x_N \tag{1.3.7}$$

onde consideramos $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 0, \ldots, N-1$.

O par de sequências (x_i, u_i), $i = 0, \ldots, N-1$, que satisfaz a relação (1.3.6) e as condições (1.3.7) diz-se admissível: x_i é uma sequência de estados admissíveis e u_i uma sequência de controlos admissíveis. As funções

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad e \quad \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

são consideradas aqui continuamente diferenciáveis em relação a todos os seus argumentos e convexas como funções do último argumento u. Elas são, em geral, não lineares. Os controlos tomam valores no conjunto Ω convexo.

Relembramos as definições de conjunto convexo e função convexa.

Definição 9 (Conjunto Convexo)**.** Ω é um conjunto convexo se para qualquer u_a, $u_b \in \Omega$ se verifica:

$$\alpha \cdot u_a + (1-\alpha) \cdot u_b \in \Omega, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Definição 10 (Função Convexa)**.** $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ é uma função convexa em relação ao seu último argumento sobre um conjunto Ω se para qualquer u_a, $u_b \in \Omega$ e qualquer $\alpha \in [0,1]$ se verifica:

$$L(t_i, x_i, \alpha \cdot u_a + (1-\alpha) \cdot u_b) \leq \alpha \cdot L(t_i, x_i, u_a) + (1-\alpha) \cdot L(t_i, x_i, u_b).$$

De modo semelhante, $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ é uma função convexa em relação ao seu terceiro argumento sobre o conjunto Ω se para qualquer u_a, $u_b \in \Omega$ e qualquer $\alpha \in [0,1]$ se verifica:

$$\varphi(t_i, x_i, \alpha \cdot u_a + (1-\alpha)\cdot u_b) \leq \alpha \cdot \varphi(t_i, x_i, u_a) + (1-\alpha)\cdot \varphi(t_i, x_i, u_b).$$

Observação 3. Para problemas de controlo óptimo contínuos não é necessário assumir-se convexidade para demonstrar o Princípio do Máximo de Pontryagin. No caso discreto, consideramos as hipóteses de convexidade acima, embora seja possível considerar outras condições mais fracas [7].

O teorema seguinte dá-nos a condição necessária de optimalidade de primeira ordem para o problema (1.3.5)-(1.3.7) análoga ao Teorema 2.

Teorema 3 (*Princípio do Máximo de Pontryagin para o problema discreto*(1.3.5)-(1.3.7) [7])**.** *Se* (x_i, u_i), $i = 0, \ldots, N-1$, *é uma sequência minimizante ou maximizante do problema* (1.3.5)-(1.3.7), *então existe uma sequência* $(\lambda_0, \psi(t_i))$ *não nula,* $i = 0, \ldots, N-1$, *onde* λ_0 *é uma constante não positiva e* $\psi(t_i) = \psi_i \in \mathbb{R}^n$, *tal que o quadruplo* $(x_i, u_i, \lambda_0, \psi_i)$, $i = 0, \ldots, N-1$, *satisfaz:*

1. *o sistema Hamiltoniano discreto*

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_i}{\Delta t} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}\left(t_i, x_i, u_i, \lambda_0, \psi_i\right), \quad i = 0, \ldots, N-1, \\ \dfrac{\Delta \psi_i}{\Delta t} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\left(t_i, x_i, u_i, \lambda_0, \psi_i\right), \quad i = 0, \ldots, N-1; \end{cases} \tag{1.3.8}$$

2. *a condição de máximo discreta*

$$H\left(t_i, x_i, u_i, \lambda_0, \psi_i\right) = \max_{v \in \Omega} H\left(t_i, x_i, v, \lambda_0, \psi_i\right) \tag{1.3.9}$$

com o Hamiltoniano H *definido por* $H(t, x, u, \lambda_0, \psi) = \lambda_0 L(t, x, u) + \psi \cdot \varphi(t, x, u)$.

Observação 4. A primeira equação no Sistema Hamiltoniano é o sistema de controlo (1.3.6).

A segunda equação no Sistema Hamiltoniano é conhecida por sistema adjunto. Os multiplicadores $\psi(\cdot)$ são chamados multiplicadores adjuntos ou variáveis de co-estado.

Definição 11. A sequência de quadruplos $(x_i, u_i, \lambda_0, \psi_i)$, $i = 0, \ldots, N-1$, $\lambda_0 \leq 0$, que satisfaz o sistema Hamiltoniano e a condição de máximo é chamada de *extremal* do problema (1.3.5)-(1.3.7). Uma extremal diz-se normal se $\lambda_0 < 0$ e anormal se $\psi_0 = 0$ (conforme com a Definição 7).

Na Economia, o Controlo Óptimo discreto é normalmente abordado por intermédio da Programação Dinâmica.

A programação dinâmica é um método de resolução de uma vasta gama de problemas de optimização. A ideia básica é interpretar o problema original (1.3.5)-(1.3.7) como um dos problemas de uma classe de problemas mais genérica e usar um método recursivo para se obter a solução do problema original (1.3.5)-(1.3.7). A família de problemas tem a mesma função objectivo (1.3.5) e a mesma dinâmica (1.3.6), mas estados iniciais e instantes iniciais diferentes: para $k = 0 \ldots, N-1$, definimos

$$J\left(x_k, \ldots, x_{N-1}, u_k, \ldots, u_{N-1}\right) = \sum_{i=k}^{N-1} L\left(t_i, x_i, u_i\right) \tag{1.3.10}$$

sujeita ao sistema de controlo discreto

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \varphi\left(t_i, x_i, u_i\right) \Leftrightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} &= \varphi\left(t_i, x_i, u_i\right) \\ \Leftrightarrow x_{i+1} = x_i + \varphi\left(t_i, x_i, u_i\right) \Delta t \\ \Leftrightarrow x_{i+1} := f\left(t_i, x_i, u_i\right), \quad i = k, \ldots, N-1\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

e às condições de fronteira

$$x(k) = x_k\,, \quad x(N) = x_N\,. \tag{1.3.12}$$

Os parâmetros essenciais no problema de optimização (1.3.10)-(1.3.12) são o instante de tempo, t_i, em que nos encontramos e o valor das variáveis de estado, x_i, nesse instante. Por essa razão usamos a notação $(1.3.10)\text{-}(1.3.12)_{t_k, x_k}$ para distinguir os diferentes problemas.

As ideias principais da programação dinâmica são baseadas no Lema 2. Sem perda de generalidade, consideramos o problema de maximização.

Lema 2. *Suponhamos que* $u_k^*, \dots, u_{N-1}^*$ *é o controlo óptimo para* $(1.3.10)$-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$. *Seja* $x_k^* = x_k, x_{k+1}^*, \dots, x_N^* = x_N$ *a correspondente trajectória óptima. Então, para qualquer* l, $k \leq l \leq N-1$, $u_l^*, \dots, u_{N-1}^*$ *é o controlo óptimo para* $(1.3.10)$-$(1.3.12)_{t_l,x_l^*}$.

Demonstração. Vamos supor que $u_l^*, \dots, u_{N-1}^*$ não é o controlo óptimo para (1.3.10)-$(1.3.12)_{t_l,x_l^*}$. Então existe um controlo $\hat{u}_l, \hat{u}_{l+1}, \dots, \hat{u}_{N-1}$, com a trajectória óptima $\hat{x}_l = x_l^*, \hat{x}_{l+1}, \dots, \hat{x}_N = x_N^*$ tal que

$$\sum_{i=l}^{N-1} L\left(t_i, \hat{x}_i, \hat{u}_i\right) > \sum_{i=l}^{N-1} L\left(t_i, x_i^*, u_i^*\right) \tag{1.3.13}$$

Considerando um controlo $\tilde{u}_k, \dots, \tilde{u}_{N-1}$ com

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i^*, & i = k, \dots, l-1 \\ \hat{u}_i, & i = l, \dots, N-1 \end{cases}$$

e a trajectória correspondente $\tilde{x}_k, \dots, \tilde{x}_N$ onde

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i^*, & i = k, \dots, l \\ \hat{x}_i, & i = l+1, \dots, N\,, \end{cases}$$

o valor da função objectivo que corresponde a este controlo óptimo para o problema $(1.3.10)$-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$ é

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{N-1} L\left(t_i, \tilde{x}_i, \tilde{u}_i\right) &= \sum_{i=k}^{l-1} L\left(t_i, x_i^*, u_i^*\right) + \sum_{i=l}^{N-1} L\left(t_i, \hat{x}_i, \hat{u}_i\right) \\ &> \sum_{i=k}^{N-1} L\left(t_i, x_i^*, u_i^*\right) \end{aligned}$$

por (1.3.13). Assim $u_k^*, \dots, u_{N-1}^*$ não é o controlo óptimo de $(1.3.10)$-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$ o que contradiz a hipótese do lema. □

A partir de agora, assumimos que $(1.3.10)$-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$ tem uma solução óptima para todo $0 \leq k \leq N-1$ e para todo o $x_k \in \mathbb{R}^n$. Essa solução óptima é obtida a partir da definição e do teorema seguintes.

Definição 12. Chamamos *função valor* à função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par (t_i, x_i) devolve o valor óptimo $V(t_i, x_i)$ da função objectivo (1.3.10), que no instante t_i começa no estado x_i.

A resolução do problema (1.3.5)-(1.3.7) pela programação dinâmica baseia-se no chamado *Princípio de Optimalidade* ou *Princípio de Bellman*.

Teorema 4 (Princípio de Optimalidade)**.** *Pela definição 12, $V(t_k, x_k)$ é o valor máximo de* $(1.3.10)\text{-}(1.3.12)_{t_k,x_k}$ *e satisfaz a equação recursiva*

$$V(t_k, x_k) = \max_u \{L(t_k, x_k, u)\} + V(t_{k+1}, x_{k+1}) \quad 0 \leq k \leq N-1. \tag{1.3.14}$$

Demonstração. Seja $u_k^*, \ldots, u_{N-1}^*$ um controlo óptimo de $(1.3.10)\text{-}(1.3.12)_{t_k,x_k}$ e seja $x_k^* = x_k, \ldots, x_N^*$ a correspondente trajectória óptima. Temos

$$\sum_{i=k}^{N-1} L(t_i, x_i^*, u_i^*) \geq \sum_{i=k}^{N-1} L(t_i, x_i, u_i). \tag{1.3.15}$$

Pelo Lema 2 o primeiro membro da desigualdade (1.3.15) é igual a

$$L(t_k, x_k^*, u_k^*) + V(t_{k+1}, f(t_k, x_k^*, u_k^*)) \ ; \tag{1.3.16}$$

enquanto pela Definição 12 o segundo membro da desigualdade (1.3.15) é igual a

$$L(t_k, x_k, u_k) + \sum_{i=k+1}^{N-1} L(t_i, x_i, u_i) \geq L(t_k, x_k, u_k) + V(t_{k+1}, f(t_k, x_k, u_k)) \tag{1.3.17}$$

onde a igualdade é verdadeira se e só se $u_{k+1}, \ldots, u_{N-1}$ é um controlo óptimo para (1.3.10)-$(1.3.12)_{t_{k+1},x_{k+1}}$. Usando (1.3.16) e (1.3.17) em (1.3.15) vem que

$$L(t_k, x_k^*, u_k^*) + V(t_{k+1}, f(t_k, x_k^*, u_k^*)) \geq L(t_k, x_k, u_k) + V(t_{k+1}, f(t_k, x_k, u_k))$$

para todo o $u_k \in \Omega$, que é equivalente a (1.3.14). □

Corolário 5. *Seja* $u_k, \ldots, u_{N-1}$ *um qualquer controlo admissível para o problema* (1.3.10)-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$ *e seja* $x_k, \ldots, x_N$ *a trajectória correspondente. Então*

$$V\left(t_l, x_l\right) \geq L\left(t_l, x_l, u_l\right) + V\left(t_{l+1}, f\left(t_l, x_l, u_l\right)\right), \quad k \leqslant l \leqslant N-1\,.$$

A igualdade é válida para todo o $k \leq l \leq N-1$ *se e só se o controlo* $u_k, \ldots, u_{N-1}$ *for óptimo para* (1.3.10)-$(1.3.12)_{t_k,x_k}$.

Corolário 6. *Para* $i = 0, 1, \ldots, N-1$, *seja* $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \Omega$ *tal que*

$$L\left(t_i, x_i, \theta(t_i, x_i)\right) + V\left(t_{i+1}, f\left(t_i, x_i, \theta(t_i, x_i)\right)\right) = \max_u \left\{L\left(t_i, x_i, u\right)\right\} + V\left(t_{i+1}, f\left(t_i, x_i, u_i\right)\right). \tag{1.3.18}$$

Então $\theta(\cdot, \cdot)$ *define recursivamente um controlo óptimo (controlo óptimo por* feedback*), isto é, para qualquer estado* x_i *no instante* t_i, *o controlo óptimo* $u_i*, \ldots, u^*_{N-1}$ *para o problema* $(1.3.10) - (1.3.12)_{t_i,x_i}$ *fica definido por* $u^*_k = \theta(t_k, x^*_k)$, *com* $i \leq k \leq N-1$, *onde* $x^*_{k+1} = f(t_k, x^*_k, \theta(t_k, x^*_k))$, *com* $i \leq k \leq N-1$ *e* $x^*_i = x_i$.

O Teorema 4 e o Corolário 6 constituem as ideias principais da programação dinâmica. Essas ideias devem-se a Richard Bellman que desenvolveu a programação dinâmica em meados dos anos cinquenta (século XX). Bellman é conhecido pelo seu Princípio da Optimalidade (Teorema 4): *"o controlo óptimo tem a propriedade de, independentemente do estado inicial e das decisões já tomadas, as restantes decisões constituírem a estratégia óptima em relação ao estado resultante das decisões anteriormente tomadas."*

Exemplo 5. Um consumidor vive três períodos, $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$. Em cada período pode consumir dois bens, u e v. O consumidor dispõe de uma certa riqueza inicial, x_0, e não recebe rendimento em nenhum dos períodos. O problema do consumidor é escolher quanto consumir de u e de v em cada um dos períodos, de forma a maximizar a sua utilidade:

$$\sum_{i=0}^{2} L\left(t_i, x_i, u_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{2} u_i v_i \to \max$$

onde u_0 e v_0, u_1 e v_1 e u_2 e v_2 são as quantidades consumidas de u e v em $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, respectivamente. Em termos matemáticos, u e v são os controlos.

O problema pode ser formalizado da seguinte forma:

$$\max_{u_0,v_0,u_1,v_1,u_2,v_2} (u_0v_0) + (u_1v_1) + (u_2v_2)$$

sujeito a

$$p_{u_0}u_0 + p_{v_0}v_0 + p_{u_1}u_1 + p_{v_1}v_1 + p_{u_2}u_2 + p_{v_2}v_2 = x_0$$

Para simplificar as contas, admitamos que o preço de cada um dos bens é igual a 1 em todos os períodos ($p_{u_0} = p_{v_0} = p_{u_1} = p_{v_1} = p_{u_2} = p_{v_2} = 1$).

Vejamos agora como resolver o problema, usando a programação dinâmica.

Note-se que a função de utilidade é temporalmente separável (a utilidade marginal do consumo dos bens u e v num dado período não depende do consumo desses bens noutros períodos), logo, é possível resolver o problema, usando a programação dinâmica. Designemos por x_i a riqueza ainda disponível no início do período t_i. A riqueza disponível é a variável de estado, e as quantidades a consumir de cada um dos bens são as variáveis de controlo. A evolução da riqueza, denominada em Matemática por dinâmica do sistema, é dada por:

$$x_{i+1} = x_i - u_i - v_i$$

Comecemos por resolver o problema do consumidor no período 2. A riqueza disponível nesse período é x_2:

$$\max_{u_2,v_2} u_2v_2$$

sujeito a

$$u_2 + v_2 \leqslant x_2$$

Resolvendo este problema, obtemos:

$$u_2^* = v_2^* = \frac{x_2}{2},$$

ou seja, no último período, a regra de consumo óptima é dividir a riqueza ainda disponível igualmente pelos dois bens. Mas isto implica que, se a riqueza disponível for x_2, o valor máximo da utilidade neste período, Definição 12, será:

$$V\left(t_2, x_2\right) = \frac{x_2}{2}\frac{x_2}{2} = \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - u_1 - v_1}{2}\right)^2 .$$

Conhecendo a política óptima no período 2, podemos aplicar o princípio de optimalidade, Teorema 4, para derivar a política óptima em $t = 1$. O problema a resolver é:

$$\max_{u_1, v_1} u_1 v_1 + \left(\frac{x_1 - u_1 - v_1}{2}\right)^2 .$$

Resolvendo este problema, obtemos $u_1^* = v_1^* = \frac{1}{4}x_1$. Logo, a utilidade máxima do período 1 em diante, que corresponde a uma riqueza disponível no início do período de x_1, é dada por:

$$V\left(t_1, x_1\right) = \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(x_0 - u_0 - v_0\right)^2 .$$

Para completarmos a resolução do problema, basta-nos determinar a política óptima de consumo no período $t = 0$:

$$\max_{u_0, v_0} u_0 v_0 + \frac{1}{8}\left(x_0 - u_0 - v_0\right)^2 .$$

A solução deste problema é $u_0^* = v_0^* = \frac{1}{6}x_0$, o que implica que $x_1 = \frac{2}{3}x_0$. Mas, se $x_1 = \frac{2}{3}x_0$, então o consumo óptimo em $t = 1$ é $u_1^* = v_1^* = \frac{1}{4}x_1 = \frac{1}{6}x_0$ e a riqueza ainda disponível no fim do período é $x_2 = \frac{1}{3}x_0$. Finalmente, se $x_2 = \frac{1}{3}x_0$, o consumo no último período é $u_2^* = v_2^* = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{6}x_0$.

1.4 Conclusão

Depois da apresentação dos conceitos fundamentais do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo, vamos abordar no Capítulo 2 o Teorema de Noether.

Capítulo 2

Teorema de Noether

2.1 Introdução

O estudo sistemático de problemas invariantes do Cálculo das Variações foi iniciado em 1918 por Emmy Amalie Noether, a distinta matemática alemã que descobriu o princípio fundamental da invariância, conhecido como Teorema de Noether. Noether combinou os métodos do Cálculo das Variações com a teoria dos grupos de Lie, afirmando que (vide [15]):

"A invariância de um sistema com respeito a uma família de transformações paramétricas, implica a existência de uma lei de conservação para esse sistema".

Lei de conservação

Encontrar a solução geral da equação de Euler-Lagrange, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, é geralmente muito difícil. As leis de conservação são funções $\Phi(t, x(t), \dot{x}(t))$ constantes ao longo de todas as soluções $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange. Reparar que $\Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = const$ é uma equação diferencial de ordem um.

Lei de conservação da quantidade de movimento

Se a função L não depende de $x : L = L(t, \dot{x})$, ocorre a *lei de conservação da quantidade* *de movimento*. A equação de Euler-Lagrange (1.2.2) tem a forma

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\left(t,\dot{x}\left(t\right)\right)=0,$$

pelo que $L_{\dot{x}}(t,\dot{x}(t)) = const.$

Lei de conservação da energia

Se a função L não depende de $t : L = L(x,\dot{x})$, então obtemos a *lei de conservação de energia*: $\dot{x}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)-L\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)=const.$ Com efeito, para toda a solução $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\dot{x}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)-L\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)\right)\\&=\ddot{x}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)+\dot{x}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)-\frac{d}{dt}L\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)\\&=\ddot{x}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)+\dot{x}L_{x}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)-\dot{x}L_{x}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)-\ddot{x}L_{\dot{x}}\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)=0.\end{aligned}$$

A aplicação das leis de conservação permite baixar a ordem das equações diferenciais dadas pelas condições necessárias. Por este motivo, as leis de conservação podem simplificar o processo de resolução dos problemas do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo.

No Controlo Óptimo, a relação entre a invariância de um problema e a existência de expressões que são constantes ao longo de qualquer das suas extremais de Pontryagin, foi dada a conhecer em publicações dos anos setenta (século XX).

2.2 Teorema de Noether no contexto do Cálculo das Variações

2.2.1 Caso Contínuo

Definição 13. Uma função $C(t,x,\dot{x})$ preservada ao longo de todas as extremais ($C(t,x(t),\dot{x}(t))$ é constante em t para toda a extremal $x(\cdot)$) é denominada por *primeiro integral*. À equação $C(t,x(t),\dot{x}(t)) =$ constante chamamos *lei de conservação*.

Vamos começar por definir um grupo de Lie local h^s, com geradores T e X.

Seja h uma aplicação

$$h : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

definida pelas equações

$$\bar{t} = h_t\,(t,x)$$
$$\bar{x}^i = h_{x^i}\,(t,x)$$

onde $i = 1, \ldots, n$ e h_t e h_x são funções dadas.

Em particular, consideremos a transformação do plano

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definida pelas equações

$$\bar{t} = h_t\,(t,x) \ ,$$
$$\bar{x} = h_x\,(t,x)$$

Geometricamente h transforma o ponto (t,x) num outro ponto $(\bar{t},\bar{x})$ do mesmo plano com referência aos mesmos eixos coordenados.

O tipo de transformações simétricas pela qual estudamos as propriedades invariantes de (1.2.1) são transformações do plano com a suposição de que a transformação também depende de um parâmetro s.

Seja $s = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ uma família com r parâmetros que varia continuamente num intervalo aberto

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{r} (s_k)^2} < s_0$$

e consideremos a colecção h^s de todas as transformações definidas por

$$\bar{t} = h_t\,(t,x,s)\,, \bar{x}^i = h_{x^i}\,(t,x,s) \tag{2.2.1}$$

onde h_t e h_{x^i} são funções analíticas de $[a,b]\times\mathbb{R}^n\times]-s_0,s_0[\,\to\mathbb{R}$. A transformação definida por (2.2.1) diz-se uma família r-paramétrica de transformações em $\mathbb{R}^n$. Admitimos que para $s=0$ vem $\bar{t}=h_t\,(t,x,0)=t$ e $\bar{x}=h_x\,(t,x,0)=x$.

Uma família r-paramétrica de transformações h^s forma um grupo de Lie local se e só se é satisfeita a propriedade local de grupo fechado, se contém a identidade e se a inversa existe para todo o s pequeno.

Se h^s definido por (2.2.1) é um grupo de Lie local, então $h_t=(t,x,s)$ e $h_{x^i}=(t,x,s)$ podem ser expandidos em série de Taylor numa vizinhança de $s=0$:

$$\begin{aligned}\bar{t}&=h_t\,(t,x,0)+\frac{\partial h_t}{\partial s_k}\,(t,x,0)\,s_k+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 h_t}{\partial s_k^2}\,(t,x,0)\,s_k^2+\ldots\\&=t+T\,(t,x)\,s_k+o\,(s_k)\\\bar{x}^i&=h_{x^i}\,(t,x,0)+\frac{\partial h_{x^i}}{\partial s_k}\,(t,x,0)\,s_k+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 h_{x^i}}{\partial s_k^2}\,(t,x,0)\,s_k^2+\ldots\\&=x^i+X_k^i\,(t,x)\,s_k+o\,(s_k)\end{aligned}$$

onde $i=1,\ldots,n$ e $k=1,\ldots,r$.

Observação 5. Tendo em conta que x^i é a componente da variável de estado x, h_x pode ser expandida em série de Taylor numa vizinhança de $s=0$:

$$\begin{aligned}\bar{x}&=h_x\,(t,x,0)+\frac{\partial h_x}{\partial s_k}\,(t,x,0)\,s_k+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 h_x}{\partial s_k^2}\,(t,x,0)\,s_k^2+\ldots\\&=x+X\,(t,x)\,s_k+o\,(s_k)\;.\end{aligned}$$

Salienta-se o facto de definir o produto como:

$$\begin{aligned}&X\,(t,x)\,s_k=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}X_k^i\,(t,x)\,s_k=\\&=X_1^1\,(t,x)\,s_1+X_1^2\,(t,x)\,s_1+\ldots+X_1^n\,(t,x)\,s_1+X_2^1\,(t,x)\,s_2+\ldots+X_r^n\,(t,x)\,s_r\end{aligned}$$

Define-se T_k e X_k^i por

$$T_k\,(t,x)\equiv\frac{\partial h_t}{\partial s_k}\,(t,x,0)$$

$$X_k^i\left(t,x\right) \equiv \frac{\partial h_{x^i}}{\partial s_k}\left(t,x,0\right)$$

onde $i=1,\ldots,n$ e $k=1,\ldots,r$.

Para um s pequeno a transformação infinitesimal

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + s_k T_k\left(t,x\right) + o\left(s_k\right)\\ \bar{x}^i &= x^i + s_k X_k^i\left(t,x\right) + o\left(s_k\right)\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

aproxima-se de T_k e de X_k^i.

As quantidades T e X são chamadas geradores de h^s e definem a parte linear principal da transformação em T e em X, respectivamente, ou seja, são os coeficientes dos termos em s na expansão em série de Taylor.

O grupo de Lie local h^s dado pela equação (2.2.2) induz o grupo de Lie $\tilde{h}^s$ no espaço $tx\dot{x}$ definido pelas equações:

$$\tilde{h}^s : \begin{cases} \bar{t} = h_t\left(t,x,s\right) \\ \bar{x} = h_x\left(t,x,s\right) \\ \dot{\bar{x}} = \dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \dfrac{\frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\partial h_x}{\partial x}\cdot\dot{x}}{\frac{\partial h_t}{\partial t} + \frac{\partial h_t}{\partial x}\cdot\dot{x}} \end{cases}$$

Note-se que para $i=1,\ldots,n$:

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{t}} = \frac{\frac{d\bar{x}^i}{dt}}{\frac{d\bar{t}}{dt}} = \frac{\frac{\partial h_{x^i}}{\partial t} + \frac{\partial h_{x^i}}{\partial x^i}\dot{x}^i}{\frac{\partial h_t}{\partial t} + \frac{\partial h_t}{\partial x^i}\dot{x}^i}$$

$$\frac{\partial h_{x^i}}{\partial t} = s_k\frac{\partial X_k^i}{\partial t} + o(s_k)$$

$$\frac{\partial h_{x^i}}{\partial x^i} = 1 + s_k\frac{\partial X_k^i}{\partial x^i} + o(s_k)$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} = 1 + s_k\frac{\partial T_k}{\partial t} + o(s_k)$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial x^i} = s_k\frac{\partial T_k}{\partial x^i} + o(s_k)$$

Então

$$\dot{\bar{x}}^i = \frac{s_k \frac{\partial X_k^i}{\partial t} + \left(1 + s_k \frac{\partial X_k^i}{\partial x^k}\right) \dot{x}^k + o(s_k)}{1 + s_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + s_k \frac{\partial T_k}{\partial x^i} \dot{x}^i + o(s_k)} = \frac{\dot{x}^k + s_k \dot{X}_k^i + o(s_k)}{1 + s_k \dot{T}_k + o(s_k)} = \dot{x}^i + \left(\dot{X}_k^i - \dot{x}^i \dot{T}_k\right) s_k + o(s_k) \tag{2.2.3}$$

O termo linear em s em expansão de $\dot{\bar{x}}^i$ é $\dot{X}_k^i - \dot{x}^i \dot{T}_k$.

As quantidades T, X e $(\dot{X} - \dot{x}\dot{T})$ são os geradores do grupo $\tilde{h}^s$ e são necessários no desenvolvimento das condições de invariância.

Definição 14. A funcional (1.2.1) diz-se *quasi-invariante* sob um grupo de Lie local h^s se, e só se,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) dt + \frac{d\Phi}{dt}\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), s\right) + o(s_k) \\ = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\left(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(\bar{t})\right) d\bar{t}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

onde $k = 1, \ldots, r$, $\bar{t}_1 = h_t(t_1, x(t_1), s_k)$, $\bar{t}_2 = h_t(t_2, x(t_2), s_k)$, $h_t = h_t(t, x(t), s_k)$, $h_x = h_x(t, x(t), s_k)$, e (2.2.4) se verifica para todo o $|s| < s_0$, para todo o $x(\cdot) \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ e para todo o sub-intervalo $[t_1, t_2]$ de $[a, b]$.

Observação 6. A condição (2.2.4) implica que

$$\frac{d}{ds_k} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\left(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(\bar{t})\right) d\bar{t} \bigg|_{s=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0} \tag{2.2.5}$$

onde Φ é denominado por termo de Gauge.

Observação 7. Quando $\Phi = 0$ a funcional diz-se invariante sob o grupo de Lie local h^s se e só se

$$\frac{d}{ds_k} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\left(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(\bar{t})\right) d\bar{t} = 0.$$

Teorema 7 (Condição necessária e suficiente de quasi-invariância)**.** *A funcional* (1.2.1) *é* quasi-invariante *sob um grupo de Lie local* (2.2.1) *com geradores T e X, se e só se*

$$\frac{\partial L}{\partial t} T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\dot{X}_k - \dot{x}\dot{T}_k\right) + L\dot{T}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}. \tag{2.2.6}$$

Corolário 8 (Condição necessária e suficiente de invariância)**.** *A funcional* (1.2.1) *é invariante sob um grupo de Lie local* (2.2.1) *com geradores* T *e* X*, se e só se*

$$\frac{\partial L}{\partial t}T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\dot{X}_k - \dot{x}\dot{T}_k\right) + L\dot{T}_k = 0\,.$$

Demonstração. Como a equação (2.2.4) (ou a (2.2.5)) está definida para todo o subintervalo $[t_1, t_2]$, podemos remover o integral da definição de quasi-invariância. A equação (2.2.5) é equivalente a

$$\frac{d}{ds_k}\left\{L\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)\frac{d\bar{t}}{dt}\right\}\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds_k}\left\{L\left(h_t, h_x, \frac{\frac{\partial h_x}{\partial t} + \dot{x} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial x}}{\frac{\partial h_t}{\partial t} + \dot{x} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial x}}\right)\frac{dh_t}{dt}\right\}\bigg|_{s=0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0} \tag{2.2.7}$$

Efectuando a derivada da equação (2.2.7) obtemos:

$$L\frac{d}{ds_k}\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)\bigg|_{s=0} + \frac{d}{ds_k}L\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}. \tag{2.2.8}$$

Atendendo a que por (2.2.2) e (2.2.3)

$$\frac{d}{ds_k}\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds_k}\left(\frac{d}{dt}\left(t + s_kT_k + o(s_k)\right)\right)\bigg|_{s=0} = \dot{T}_k\,,$$

$$\frac{d}{ds_k}L\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial t}T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\dot{X}_k - \dot{x}\dot{T}_k\right)\,,$$

obtemos de (2.2.8) a condição desejada:

$$L\dot{T}_k + \frac{\partial L}{\partial t}T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\dot{X}_k - \dot{x}\dot{T}_k\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}.$$

□

Teorema 9 (*Teorema de Noether - formulação Lagrangeana, ver e.g. [8]*)**.** *Se*

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right) dt \tag{2.2.9}$$

for quasi-invariante *sob um grupo de Lie local* h^s *com geradores* T *e* X*, então*

$$\left[L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) - \dot{x}(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right]T_k(t, x(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) \cdot X_k(t, x(t)) - \frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t, x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right), s\right)\bigg|_{s=0} = constante\,, \tag{2.2.10}$$

$\forall t \in [a, b]$*,* $k = 1, \ldots, r$*, ao longo de todas as soluções da equação de Euler-Lagrange.*

Observação 8. Seja H o Hamiltoniano definido no Teorema 2. Como vimos anteriormente na Observação 2 temos:

$$H\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)=-L\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)+\dot{x}\left(t\right)\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)$$

obtemos então a **formulação Hamiltoniana** do Teorema de Noether: podemos escrever (2.2.10) na forma

$$\begin{aligned}-H\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)T_k\left(t,x\left(t\right)\right)&+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)\cdot X_k\left(t,x\left(t\right)\right)\\&-\frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t,x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right),s\right)\bigg|_{s=0}=\text{constante}\qquad(2.2.11)\end{aligned}$$

Demonstração. Cálculos directos mostram que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot X_k\right)-X_k\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot X_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{X}_k-X_k\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{X}_k\,,\qquad(2.2.12)$$

$$\begin{aligned}&\frac{dL}{dt}T_k-\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{x}T_k-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x}T_k=\\&\qquad\left(\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x}\right)T_k-\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{x}T_k-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x}T_k=\frac{\partial L}{\partial t}T_k\,,\qquad(2.2.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}T_k\right)-T_k\dot{x}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\\&\qquad\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}T_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\dot{x}T_k\right)-T_k\dot{x}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\left(\ddot{x}T_k+\dot{x}\dot{T}_k\right)\,.\qquad(2.2.14)\end{aligned}$$

Substituindo (2.2.13) na condição necessária de quasi-invariância (2.2.6)

$$\frac{\partial L}{\partial t}T_k+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot X_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\left(\dot{X}_k-\dot{x}\dot{T}_k\right)+L\dot{T}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}$$

obtemos

$$\frac{dL}{dt}T_k-\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{x}T_k-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x}T_k+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot X_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{X}_k-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\left(\dot{x}\dot{T}_k\right)+L\dot{T}_k=\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}$$

e substituindo agora (2.2.12) vem que

$$\begin{aligned}&\frac{dL}{dt}T_k-\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{x}T_k-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x}T_k+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot X_k+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot X_k\right)-X_k\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\\&\qquad\qquad\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\left(\dot{x}\dot{T}_k\right)+L\dot{T}_k=\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}\,.\end{aligned}$$

Por último, substituindo (2.2.14) na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}T_k - \frac{\partial L}{\partial x}\cdot \dot{x}T_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \ddot{x}T_k + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot X_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot X_k\right) - \\ X_k \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \ddot{x}T_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{x}T_k\right) + T_k\dot{x}\cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + L\dot{T}_k = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}.\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}T_k + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot (X_k - \dot{x}T_k) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot X_k\right) - \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{x}T_k\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot (X_k - \dot{x}T_k) + L\dot{T}_k = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s_k=0} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(LT_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot X_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{x}T_k\right) + (X_k - \dot{x}T_k)\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}.\end{aligned}$$

Ao longo das soluções da equação de Euler-Lagrange,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,,$$

temos então que

$$\frac{d}{dt}\left(LT_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot X_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{x}^iT_k\right) = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}.$$

□

2.2.2 Caso Discreto

O Teorema de Noether no Cálculo das Variações discreto é obtido a partir da equação de Euler-Lagrange discreta (1.2.7).

Definição 15. O Lagrangiano discreto $L(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t})\Delta t$ diz-se *quasi-invariante* com respeito às transformações r-paramétricas $X(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s_k)$, $k = 1, \ldots, r$, $\|s\| < s_0$, $X(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, 0) = x$ para todo $i = 0, \ldots, N-1$, $x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \in \mathbb{R}^n$, sob a diferença do termo de Gauge $\Phi(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s_k)$ se para todo $i = 0, \ldots, N-2$

$$\begin{aligned}L\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) + \Delta\Phi\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right) + \delta\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right) = \\ L\left(t_i, X\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right), X\left(t_{i+1}, x_{i+1}, \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta t}, s\right)\right)\end{aligned}$$

onde $\delta(.,.,.,.)$ é uma função que satisfaz $\left.\frac{\partial\delta\left(t_i,x_i,\frac{\Delta x_i}{\Delta t},s\right)}{\partial s_k}\right|_{s=0} = 0,\ k = 1,\ldots,r.$

Teorema 10 (*Teorema de Noether no contexto do Cálculo das Variações para o caso discreto*). *Se $L(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t})\Delta t$ é quasi-invariante com respeito às transformações infinitesimais r-paramétricas X sob a diferença do termo de Gauge Φ, no sentido da definição 15, então todas as soluções $x(t_i)$, $i = 0,\ldots,N-2$ da equação de Lagrange discreta* (1.2.7) *satisfazem:*

$$\frac{\Delta L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t}\right)}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right)\Bigg|_{s=0} + \frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right)\Bigg|_{s=0} = constante, \tag{2.2.15}$$

$k = 1,\ldots,r.$

A demonstração deste teorema será feita depois da demonstração do Teorema 13.

2.3 Teorema de Noether no contexto do Controlo Óptimo

O Teorema de Noether no Controlo Óptimo relaciona a invariância de um problema sob uma família de transformações com a existência de quantidades preservadas ao longo das extremais de Pontryagin.

2.3.1 Caso Contínuo

Vamos começar por definir um grupo de Lie local h^s, com geradores T, X e U.

Por transformação h^s do espaço entendemos uma aplicação

$$h^s : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

definida por

$$h^s(t,x,u) = \left(T(t,x,u,s), X(t,x,u,s), U(t,x,u,s)\right), \quad s = (s_1,\ldots,s_r). \tag{2.3.1}$$

Os tipos de transformações simétricas pela qual estudamos as propriedades invariantes de (1.3.1)-(1.3.2) são transformações do espaço com a suposição de que a transformação também depende do parâmetro s.

A transformação definida por (2.3.1) diz-se uma família r-paramétrica de transformações em $\mathbb{R}^n$.

Seja $s = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ uma família com r parâmetros que varia continuamente num intervalo aberto

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{r} (s_k)^2} < s_0$$

Em geral, uma família r-paramétrica de transformações h^s é chamada grupo de Lie local se e só se é satisfeita a propriedade local de grupo fechado, contém a identidade e a inversa existe para um pequeno s.

Definição 16. Uma funcional

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t))\, dt \to \min$$

onde $x(\cdot) \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ e $u(\cdot) \in PC([a,b], \Omega \subseteq \mathbb{R}^m)$ está sujeito ao sistema de controlo dinâmico

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [a,b]$$

e onde L e φ são consideradas de classe C^2, é *quasi-invariante* sob um grupo de Lie local h^s se e só se existe uma família r-paramétrica de transformações onde para $s = 0$ e para qualquer $(t, x, u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ se reduz à identidade $h^0(t, x, u) = (t, x, u)$ e satisfaz:

$$\begin{aligned} & L(t, x(t), u(t)) + \frac{d}{dt}\Phi(t, x(t), u(t), s) + o(s) = \\ & = L \circ h^s(t, x(t), u(t)) \frac{d}{dt}T(t, x(t), u(t), s) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$\frac{d}{dt}X(t, x(t), u(t), s) + o(s) = \varphi \circ h^s(t, x(t), u(t)) \frac{d}{dt}T(t, x(t), u(t), s), \tag{2.3.3}$$

para qualquer função Φ de classe C^1 e onde $o(s)$ significa os termos que convergem para zero mais rápido do que $\|s\|$, isto é,

$$\lim_{\|s\| \to 0} \frac{o(s)}{\|s\|} = 0 \quad . \tag{2.3.4}$$

O exemplo a seguir mostra um problema de Controlo Óptimo quasi-invariante sob uma família de transformações uni-paramétrica ($r = 1$).

Exemplo 6 ($n = 3$, $m = 2$). Consideramos o problema (1.3.1)-(1.3.2) com $L = (u^1)^2 + (u^2)^2$ e $\varphi = \left(u^1, u^2, \frac{u^2(x^2)^2}{2}\right)$:

$$\int_a^b \left(u^1(t)\right)^2 + \left(u^2(t)\right)^2 dt \to \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = u^1(t) \\ \dot{x}^2(t) = u^2(t) \\ \dot{x}^3(t) = \dfrac{u^2(t)\left(x^2(t)\right)^2}{2} \end{cases}$$

Cálculos directos mostram que o problema é invariante sob $h^s(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = (t, x^1 + st, x^2 + st, x^3 + \frac{1}{2}(x^2)^2 st, u^1 + s, u^2 + s)$;

$$h^0(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = (t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$$

$$L \circ h^s \frac{d}{dt}(t) = \left(u^1 + s\right)^2 + \left(u^2 + s\right)^2 = \left((u^1)^2 + (u^2)^2\right) + 2s\left(u^1 + u^2\right) + 2s^2 \quad ,$$

e a equação (2.3.2) é satisfeita com $\Phi(t, x^1, x^2, s) = 2s(x^1 + x^2)$ e $o(s) = 2s^2$;

$$\varphi^1 \circ h^s \frac{d}{dt}(t) = u^1 + s = \frac{d}{dt}\left(x^1 + st\right)$$

$$\varphi^2 \circ h^s \frac{d}{dt}(t) = u^2 + s = \frac{d}{dt}\left(x^2 + st\right)$$

$$\begin{aligned} \varphi^3 \circ h^s \frac{d}{dt}(t) &= \frac{(u^2 + s)(x^2 + st)^2}{2} = \\ &= \frac{u^2(x^2)^2}{2} + \frac{1}{2}s((x^2)^2 + 2x^2u^2t) + \frac{(u^2t^2 + 2x^2t)s^2 + t^2s^3}{2} = \\ &= \frac{d}{dt}(x^3 + \frac{1}{2}(x^2)^2 st) + o(s) \quad , \end{aligned}$$

$\left(o(s) = \frac{(u^2t^2 + 2x^2t)s^2 + t^2s^3}{2}\right)$ e (2.3.3) é também satisfeita.

O próximo teorema é útil.

Teorema 11. *As condições necessárias para o problema* (1.3.1)-(1.3.2) *ser quasi-invariante sob a família de transformações* r*-paramétrica* (2.3.1) *são* $(k = 1, \ldots, r)$*:*

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left. L\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} \tag{2.3.5}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left. \varphi\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} \tag{2.3.6}$$

Demonstração. Utilizando a Definição 16 derivamos a equação (2.3.2) em ordem a s_k e fazemos $s = 0$:

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left. L\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} .$$

Utilizando a Definição 16 derivamos a equação (2.3.3) em ordem a s_k, o que para $s = 0$ nos dá:

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \left. \varphi\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0}$$

□

Observação 9. Se apenas conhecemos as transformações, as equações (2.3.5) e (2.3.6) representam equações diferenciais de 1.ª ordem das funções desconhecidas L e φ, e o Teorema 2.3.6 pode ser usado para caracterizar o conjunto de problemas de controlo óptimo que possui dadas propriedades invariantes.

Observação 10. De (2.3.2) temos

$$o(s) = L \circ h^s \frac{d}{dt}T(t, x(t), u(t), s) - L - \frac{d}{dt}\Phi(t, x(t), u(t), s) \quad ,$$

enquanto que de (2.3.3) temos

$$o(s) = \varphi \circ h^s \frac{d}{dt}T(t, x(t), u(t), s) - \frac{d}{dt}X(t, x(t), u(t), s) \quad .$$

Destas igualdades podem-se deduzir as fórmulas explícitas para as derivadas de cada $o(s_1, \ldots, s_r)$ com respeito a s_k, $k = 1, \ldots, r$. As derivadas desaparecem para $s = (s_1, \ldots, s_r) = 0$ devido a (2.3.4).

Os próximos dois exemplos ilustram como pode ser usado o Teorema 11 para descobrir uma família de transformações que mantêm o problema invariante de acordo com a Definição 16.

Exemplo 7 ($n = 4$, $m = 2$). Consideremos o problema

$$\int_a^b \left(\left(u^1(t)\right)^2 + \left(u^2(t)\right)^2\right) dt \to \min \quad ,$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^3(t) \\ \dot{x}^2(t) = x^4(t) \\ \dot{x}^3(t) = -x^1(t)\left(\left(x^1(t)\right)^2 + \left(x^2(t)\right)^2\right) + u^1(t) \\ \dot{x}^4(t) = -x^2(t)\left(\left(x^1(t)\right)^2 + \left(x^2(t)\right)^2\right) + u^2(t) \end{cases}$$

Consideramos uma família de transformações uni-paramétrica sem mudar a variável tempo ($T = t$) e com $\Phi \equiv 0$, sob a qual o problema é quasi-invariante. O Teorema 11 afirma que as condições seguintes têm de prevalecer:

$$\begin{cases} u^1 \left.\dfrac{\partial U^1}{\partial s}\right|_{s=0} = -\, u^2 \left.\dfrac{\partial U^2}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{d}{dt}\left.\dfrac{\partial X^1}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\dfrac{\partial X^3}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{d}{dt}\left.\dfrac{\partial X^2}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\dfrac{\partial X^4}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{d}{dt}\left.\dfrac{\partial X^3}{\partial s}\right|_{s=0} = -\left(3(x^1)^2 + (x^2)^2\right) \left.\dfrac{\partial X^1}{\partial s}\right|_{s=0} - 2x^1x^2 \left.\dfrac{\partial X^2}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\dfrac{\partial U^1}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{d}{dt}\left.\dfrac{\partial X^4}{\partial s}\right|_{s=0} = -2x^1x^2 \left.\dfrac{\partial X^1}{\partial s}\right|_{s=0} - \left((x^1)^2 + 3(x^2)^2\right) \left.\dfrac{\partial X^2}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\dfrac{\partial U^2}{\partial s}\right|_{s=0} \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Claramente se verifica que (2.3.7) é satisfeita por

$$\left.\frac{\partial U^1}{\partial s}\right|_{s=0} = -u^2, \quad \left.\frac{\partial U^2}{\partial s}\right|_{s=0} = u^1,$$
$$\left.\frac{\partial X^1}{\partial s}\right|_{s=0} = -x^2, \quad \left.\frac{\partial X^2}{\partial s}\right|_{s=0} = x^1, \quad \left.\frac{\partial X^3}{\partial s}\right|_{s=0} = -x^4, \quad \left.\frac{\partial X^4}{\partial s}\right|_{s=0} = x^3.$$

Escolhendo $U^1 = u^1 - u^2 \cdot s$, $U^2 = u^2 + u^1 \cdot s$, $X^1 = x^1 - x^2 \cdot s$, $X^2 = x^2 + x^1 \cdot s$, $X^3 = x^3 - x^4 \cdot s$, $X^4 = x^4 + x^3 \cdot s$, podemos verificar que as condições (2.3.2) e (2.3.3) são de facto, verdadeiras:

$$L \circ h^s \frac{d}{dt}T = (u^1 - u^2 s)^2 + (u^2 + u^1 s)^2 = ((u^1)^2 + (u^2)^2) + ((u^1)^2 + (u^2)^2)s^2 = L + o(s),$$

$$\varphi^1 \circ h^s \frac{d}{dt}T = x^3 - x^4 s = \frac{d}{dt}(x^1 - x^2 s) = \frac{d}{dt}X^1,$$

$$\varphi^2 \circ h^s \frac{d}{dt}T = x^4 + x^3 s = \frac{d}{dt}(x^2 + x^1 s) = \frac{d}{dt}X^2,$$

$$\varphi^3 \circ h^s \frac{d}{dt}T = -(x^1 - x^2 s)((x^1 - x^2 s)^2 + (x^2 + x^1 s)^2) + u^1 - u^2 s$$

$$= [-x^1((x^1)^2 + (x^2)^2) + u^1 + x^2((x^1)^2 + (x^2)^2)s - u^2 s] + [(x^2 s - x^1)((x^1)^2 + (x^2)^2)s^2]$$

$$= \frac{d}{dt}X^3 + o(s),$$

$$\varphi^4 \circ h^s \frac{d}{dt}T = -(x^2 + x^1 s)((x^1 - x^2 s)^2 + (x^2 + x^1 s)^2) + u^2 + u^1 s$$

$$= [-x^2((x^1)^2 + (x^2)^2) + u^2 - x^1((x^1)^2 + (x^2)^2)s + u^1 s] + [(-x^2 - x^1 s)((x^1)^2 + (x^2)^2)s^2]$$

$$= \frac{d}{dt}X^4 + o(s).$$

Exemplo 8 ($n = 4$, $m = 2$). Consideremos o problema:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1\left(1 + x^2\right) \\ \dot{x}^2 = u^1 x^3 \\ \dot{x}^3 = u^2 \\ \dot{x}^4 = u^1 (x^3)^2 \end{cases}$$

com $L = (u^1)^2 + (u^2)^2$. Usando o Teorema 11 chegamos às condições necessárias para que a transformação de um parâmetro $h^s = (T, X^1, X^2, X^3, X^4, U^1, U^2)$ torne o problema quasi-invariante:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s}\Big|_{s=0} = 2u^1 \frac{\partial U^1}{\partial s}\Big|_{s=0} + 2u^2 \frac{\partial U^2}{\partial s}\Big|_{s=0} + \left((u^1)^2 + (u^2)^2\right) \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{s=0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial X^1}{\partial s}\Big|_{s=0} = u^1 \frac{\partial X^2}{\partial s}\Big|_{s=0} + \left(1 + x^2\right) \frac{\partial U^1}{\partial s}\Big|_{s=0} + u^1\left(1 + x^2\right) \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{s=0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial X^2}{\partial s}\Big|_{s=0} = u^1 \frac{\partial X^3}{\partial s}\Big|_{s=0} + x^3 \frac{\partial U^1}{\partial s}\Big|_{s=0} + u^1 x^3 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{s=0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial X^3}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{\partial U^2}{\partial s}\Big|_{s=0} + u^2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{s=0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial X^4}{\partial s}\Big|_{s=0} = 2u^1 x^3 \frac{\partial X^3}{\partial s}\Big|_{s=0} + (x^3)^2 \frac{\partial U^1}{\partial s}\Big|_{s=0} + u^1 (x^3)^2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{s=0} \end{cases}$$

As condições são satisfeitas com $\Phi \equiv 0$ e

$$\left.\frac{\partial U^1}{\partial s}\right|_{s=0} = -u^1, \quad \left.\frac{\partial U^2}{\partial s}\right|_{s=0} = -u^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial T}{\partial s}\right|_{s=0} = 2, \quad \left.\frac{\partial X^1}{\partial s}\right|_{s=0} = 3x^1, \quad \left.\frac{\partial X^2}{\partial s}\right|_{s=0} = 2(1+x^2), \quad \left.\frac{\partial X^3}{\partial s}\right|_{s=0} = x^3, \quad \left.\frac{\partial X^4}{\partial s}\right|_{s=0} = 3x^4.$$

Com as transformações $U^1 = u^1(1-s)$, $U^2 = u^2(1-s)$, $T = t(1+2s)$, $X^1 = x^1(1+3s)$, $X^2 = x^2 + 2s(1+x^2)$, $X^3 = x^3(1+s)$, $X^4 = x^4(1+3s)$, o problema é quasi-invariante:

$$\begin{aligned}
&L \circ h^s \frac{d}{dt}T = ((u^1)^2 + (u^2)^2) + ((u^1)^2 + (u^2)^2)(2s-3)s^2,\\
&\varphi^1 \circ h^s \frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}(x^1(1+3s)) - 4u^1(1+x^2)s^3,\\
&\varphi^2 \circ h^s \frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}(x^2 + 2s(1+x^2)) - u^1 x^3 (1+2s)s^2,\\
&\varphi^3 \circ h^s \frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}(x^3(1+s)) - 2u^2 s^2,\\
&\varphi^4 \circ h^s \frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}(x^4(1+3s)) + u^1 (x^3)^2 (1-3s-2s^2)s^2.
\end{aligned}$$

Vamos ver como derivar a lei de conservação a partir do conhecimento de T, Φ e X_i $(i = 1, \ldots, n)$.

O Teorema de Noether, para problemas de Controlo Óptimo, permite construir quantidades que se conservam ao longo das extremais de Pontryagin do problema respectivo. O teorema seguinte dá-nos r leis de conservação, enquanto que o problema (1.3.1)-(1.3.2) é quasi-invariante sob uma família de transformações contendo r-parâmetros.

Teorema 12 (*Teorema de Noether no Controlo Óptimo - caso contínuo*)**.** *Se o problema* (1.3.1)-(1.3.2) *é quasi-invariante sob uma família de transformações* (2.3.1) *de r-parâmetros, então, para qualquer quadruplo $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ que satisfaça o Princípio do Máximo de Pontryagin para* (1.3.1)-(1.3.2), *as r expressões são válidas $(k = 1, \ldots, r)$:*

$$\psi_0 \left.\frac{\partial \Phi(t, x(t), u(t), s)}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \psi(t) \cdot \left.\frac{\partial X(t, x(t), u(t), s)}{\partial s_k}\right|_{s=0} - H(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) \left.\frac{\partial T(t, x(t), u(t), s)}{\partial s_k}\right|_{s=0} \equiv constante \quad , \quad (2.3.8)$$

$t \in [a, b]$, com H o Hamiltoniano associado ao problema (1.3.1)-(1.3.2)*: $H(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi \cdot \varphi(t, x, u)$.*

Observação 11. A uma função $C(t, x, u, \psi_0, \psi)$ constante ao longo de todos as extremais $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ de Pontryagin do problema (1.3.1)-(1.3.2),

$$C(t, x(t), u(t), \varphi_0, \psi(t)) = k\,, \tag{2.3.9}$$

para alguma constante k, chamamos *primeiro integral*. A equação (2.3.9) é chamada a *lei de conservação* correspondente ao primeiro integral C.

Exemplo 9. Para o problema considerado no Exemplo 6 concluímos do Teorema 12 que $2\psi_0(x^1(t) + x^2(t)) + \psi^1(t)t + \psi^2(t)t + \frac{1}{2}\psi^3(t)(x^2(t))^2 t$ é constante ao longo das extremais de Pontryagin.

Exemplo 10. Para o problema considerado no Exemplo 7 o primeiro integral que se segue é obtido do Teorema 12: $-\psi^1(t)x^2(t) + \psi^2(t)x^1(t) - \psi^3(t)x^4(t) + \psi^4(t)x^3(t)$.

Exemplo 11. Para o Exemplo 8 e pelo Teorema 12, vale o seguinte primeiro integral:

$$3\psi^1(t)x^1(t) + 2\psi^2(t)(1 + x^2(t)) + \psi^3(t)x^3(t) + 3\psi^4(t)x^4(t) - 2tH \quad , \tag{2.3.10}$$

com $H = \psi_0((u^1(t))^2 + (u^2(t))^2) + \psi^1(t)u^1(t)(1 + x^2(t)) + \psi^2(t)u^1(t)x^3(t) + \psi^3(t)u^2(t) + \psi^4(t)u^1(t)(x^3(t))^2$.

Observação 12. As leis de conservação obtidas nos exemplos anteriores não são óbvias. Contudo, uma vez obtidas, são facilmente verificadas por diferenciação, usando o sistema adjunto $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ e a condição de estacionaridade $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Vamos verificar a lei de conservação obtida no Exemplo 11:
Pelo sistema adjunto temos que ψ^1 e ψ^4 são constantes enquanto $\psi^2(t)$ e $\psi^3(t)$ satisfazem $\dot{\psi}^2(t) = -\psi^1 u^1(t)$ e $\dot{\psi}^3(t) = -\psi^2 u^1(t) - 2\psi^4 u^1(t)x^3(t)$.
Tendo em conta que o problema é autónomo, o Hamiltoniano, H, é constante ao longo das extremais. Diferenciando obtemos:

$$3\psi^1 u^1(t)(1 + x^2(t)) - 2\psi^1 u^1(t)(1 + x^2(t)) + 2\psi^2(t)u^1(t)x^3(t) - \psi^2(t)u^1(t)x^3(t) - \\ 2\psi^4 u^1(t)(x^3(t))^2 + \psi^3(t)u^2(t) + 3\psi^4 u^1(t)(x^3(t))^2 - 2H = 0\,,$$

isto é,

$$\psi^1(1+x^2(t))u^1(t)+\psi^2(t)x^3(t)u^1(t)+\psi^3(t)u^2(t)+\psi^4(x^3(t))^2u^1(t)=2H\,. \qquad (2.3.11)$$

Pela definição de Hamiltoniano, a igualdade (2.3.11) é equivalente a $H=-\psi_0((u^1(t))^2+(u^2(t))^2)$, a relação segue-se da condição de extremalidade:

$$\begin{cases} 2\psi_0 u^1(t)+\psi^1\left(1+x^2(t)\right)+\psi^2(t)\,x^3(t)+\psi^4\left(x^3(t)\right)^2=0 \\ 2\psi_0 u^2(t)+\psi^3(t)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi^1\left(1+x^2(t)\right)u^1(t)+\psi^2(t)\,x^3(t)\,u^1(t)+\psi^4\left(x^3(t)\right)^2u^1(t)=-2\psi_0\left(u^1(t)\right)^2 \\ \psi^3(t)\,u^2(t)=-2\psi_0\left(u^2(t)\right)^2 \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 12. Seja $(x(\cdot),u(\cdot),\psi_0,\psi(\cdot))$ uma extremal de Pontryagin do problema (1.3.1)-(1.3.2). Multiplicando (2.3.5) por ψ_0 e (2.3.6) por $\psi(t)$ e somando as condições, podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\psi_0\,\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\psi(t)\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}= \\ &\psi_0\left(\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+L\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}\right)+ \\ &\qquad\psi(t)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\varphi\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}\right)\quad. \qquad (2.3.12) \end{aligned}$$

De acordo com a condição de máximo do Princípio do Máximo de Pontryagin, a função

$$\psi_0 L(t,x(t),U(t,x(t),u(t),s))+\psi(t)\cdot\varphi(t,x(t),U(t,x(t),u(t),s))$$

alcança extremo para $s=0$. Por esse motivo para cada $k\in\{1,\ldots,r\}$

$$\psi_0\,\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\psi(t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial U}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}=0$$

e (2.3.12) é simplificada por

$$\begin{aligned} &\psi_0\left(\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+L\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}\right)+ \\ &\qquad\psi(t)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}+\varphi\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}-\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial s_k}\bigg|_{s=0}\right)=0\quad. \end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente a

$$-\psi_0 \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} - \psi \cdot \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \frac{d}{dt}\left(H \left.\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0}\right) = 0$$

e concluímos que

$$\psi_0 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \psi \cdot \left.\frac{\partial X}{\partial s_k}\right|_{s=0} + H \left.\frac{\partial T}{\partial s_k}\right|_{s=0} = constante\,.$$

A prova está completa. □

2.3.2 Caso Discreto

Para o Controlo Óptimo, o Teorema de Noether, no caso discreto, é obtido usando a versão discreta do Princípio do Máximo de Pontryagin.

Definição 17. Seja $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \times B(s_0) \to \mathbb{R}^n, s_0 > 0$,

$$B(s_0) = \left\{ s = (s_1, \ldots, s_r) : \|s\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{r} (s_k)^2} < s_0 \right\}$$

uma transformação r-paramétrica infinitesimal tal que para cada t_i, $i = 0, \ldots, N-1$, $X(t_i, \cdot, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável relativamente a todos os argumentos e tal que $X(t_i, x, u, 0) = x$ qualquer que seja $i = 0, \ldots, N-1$, $x \in \mathbb{R}^n$, e $u \in \Omega$.

Se existir uma função real $\Phi(t_i, x, u, s)$ e para todo $s \in B(s_0)$ e $(x(t_i), u(t_i))$ admissível existe uma sequência de controlos $u(t_i, s)$, $u(t_i, 0) = u(t_i) = u_i$, tal que:

$$\begin{aligned} &L(t_i, x(t_i), u(t_i)) + \Delta\Phi(t_i, x(t_i), u(t_i), s) + \delta(t_i, x(t_i), u(t_i), s) = \\ &\qquad = L(t_i, X(t_i, x(t_i), u(t_i), s), u(t_i, s)) \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$$\Delta x_i + \delta(t_i, x(t_i), u(t_i), s) = \varphi(t_i, X(t_i, x(t_i), u(t_i), s), u(t_i, s)) \tag{2.3.14}$$

para cada $i = 0, \ldots, N-1$ e onde $\delta(t_i, x, u, s)$ é uma função arbitrária que satisfaz

$$\left.\frac{\partial \delta(t_i, x, u, s)}{\partial s_k}\right|_{s=0} = 0, \quad k = 1, \ldots, r \tag{2.3.15}$$

para cada t_i, x, u, então o problema (1.3.5) diz-se *quasi-invariante* com relação à transformação $X(t_i, x, u, s)$, sob a diferença do termo de Gauge $\Phi(t_i, x(t_i), u(t_i), s)$.

Observação 13. Na relação (2.3.13)

$$\Delta\Phi\left(t_i, x\left(t_i\right), u\left(t_i\right), s\right) = \Phi\left(t_i + 1, x\left(t_i + 1\right), u\left(t_i + 1\right), s\right) - \Phi\left(t_i, x\left(t_i\right), u\left(t_i\right), s\right)$$

Observação 14. Quando $\delta \equiv 0$ e $\Phi \equiv 0$ temos variância estrita. O termo quasi-invariante refere à possibilidade de δ ser diferente de zero.

Teorema 13 (*Teorema de Noether no Controlo Óptimo – caso discreto*)**.** *Se* (1.3.5) *é quasi-invariante com relação às transformação de r-parâmetros X sob a diferença do termo de Gauge Φ, no sentido da Definição 17, então todas as extremais* $(x(t_i), u(t_i), \lambda_0, \psi(t_i))$, *$i = 0, \ldots, N-1$, satisfazem as r expressões seguintes* $(k = 1, \ldots, r)$*:*

$$\lambda_0 \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x\left(t_i\right), u\left(t_i\right), s\right)\Big|_{s=0} + \psi\left(t_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x\left(t_i\right), u\left(t_i\right), s\right)\Big|_{s=0} = \textit{constante} \tag{2.3.16}$$

Observação 15. Os integrais de movimento obtidos no Teorema 13 são integrais de *momento*. Devido ao facto de t_i ser tempo discreto, não podemos variar t_i continuamente, por esta razão, não podemos obter os integrais de "energia"como no caso do Controlo Óptimo contínuo.

Demonstração. Seja $(x(t_i), u(t_i), \lambda_0, \psi(t_i))$ uma extremal do problema (1.3.5).

Diferenciando (2.3.13) e (2.3.14) em relação ao parâmetro s_k, $k = 1, \ldots, r$ e pressupondo $s = (s_1, \ldots, s_r) = 0$, obtemos (considerando (2.3.15) e o facto de $X(t_i, x(t_i), u(t_i), 0) = x(t_i), u(t_i, 0) = u(t_i)$):

$$\Delta \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial x}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial u}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} u\left(t_i, s\right)\Big|_{s=0} \tag{2.3.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \Delta X_i\Big|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\Big|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} u\left(t_i, s\right)\Big|_{s=0} \tag{2.3.18}$$

Do sistema adjunto

$$\psi\left(t_i\right)=\frac{\partial H}{\partial x}\left(t_i,x_i,u_i,\lambda_0,\psi\left(t_i+1\right)\right),$$

através da definição de Hamiltoniano temos:

$$-\lambda_0\frac{\partial L}{\partial x}\left(t_i,x_i,u_i\right)=\psi\left(t_i+1\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(t_i,x_i,u_i\right)-\psi\left(t_i\right)$$

e multiplicando (2.3.17) por $-\lambda_0$ obtemos:

$$\begin{aligned}\lambda_0\left(\Delta\frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t_i,x_i,u_i,s\right)-\frac{\partial L}{\partial u}\left(t_i,x_i,u_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}u\left(t_i,s\right)\right)\Bigg|_{s=0}&+\\ \left(\psi\left(t_i+1\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(t_i,x_i,u_i\right)-\psi\left(t_i\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}X\left(t_i,x_i,u_i,s\right)&=0\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

Dado que $u(t_i,0)=u(t_i)$ e de acordo com a condição de máximo, do Princípio do Máximo de Pontryagin para tempo discreto, a função:

$$s\rightarrow\lambda_0L\left(t_i,x_i,u\left(t_i,s\right)\right)+\psi\left(t_i+1\right)\cdot\varphi\left(t_i,x_i,u\left(t_i,s\right)\right)$$

atinge o seu máximo para $s=0$, portanto

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\left(\lambda_0\cdot L\left(t_i,x_i,u\left(t_i,s\right)\right)\right)+\psi\left(t_i+1\right)\cdot\varphi\left(t_i,x_i,u\left(t_i,s\right)\right)\Big|_{s=0}=0\,,$$

isto é,

$$\lambda_0\cdot\frac{\partial L}{\partial u}\left(t_i,x_i,u_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}u\left(t_i,s\right)\Big|_{s=0}+\psi\left(t_i+1\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(t_i,x_i,u_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}u\left(t_i,s\right)\Big|_{s=0}=0\tag{2.3.20}$$

De (2.3.19) e (2.3.20) vem

$$\begin{aligned}\lambda_0\cdot\Delta\frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t_i,x_i,u_i,s\right)\Big|_{s=0}&+\\ +\left(\psi\left(t_i+1\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(t_i,x_i,u_i\right)-\psi\left(t_i\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}X\left(t_i,x_i,u_i,s\right)\Big|_{s=0}&\\ +\psi\left(t_i+1\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(t_i,x_i,u_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}u\left(t_i,s\right)\Big|_{s=0}&=0\end{aligned}$$

usando (2.3.18), a última igualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 \cdot \Delta \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\bigg|_{s=0} \\
&\quad + \psi\left(t_i+1\right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(t_i, x_i, u_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} u\left(t_i, s\right) \right)\bigg|_{s=0} \\
&\qquad\qquad - \varphi\left(t_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\bigg|_{s=0} = 0
\end{aligned}$$

É equivalente

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 \cdot \Delta \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\bigg|_{s=0} \\
&+ \psi\left(t_i+1\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i+1, x\left(t_i+1\right), u\left(t_i+1\right), s\right)\bigg|_{s=0} - \varphi\left(t_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\bigg|_{s=0} = 0
\end{aligned}$$

É equivalente

$$\lambda_0 \cdot \Delta \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\bigg|_{s=0} + \Delta\left(\psi\left(t_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\right)\bigg|_{s=0} = 0$$

É equivalente

$$\Delta\left(\lambda_0 \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\right)\bigg|_{s=0} + \left(\psi\left(t_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\right)\bigg|_{s=0} = 0$$

A demonstração está completa. □

A demonstração do Teorema 10 será elaborada a partir do Teorema 13, este já demonstrado.

Demonstração. Começamos por considerar o problema (1.3.5) onde denotaremos $u_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$. A condição de máximo do Teorema 1.3.9 implica a condição de estacionaridade seguinte:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t_i, x_i, u_i, \lambda_0, \psi_{i+1}) = 0, \quad i = 0, \ldots, N-1$$

Como $H(t_i, x_i, u_i, \lambda_0, \psi_{i+1}) = \lambda_0 L(t_i, x_i, u_i) + \psi_{i+1} \cdot \varphi(t_i, x_i, u_i)$ derivando em ordem a u e igualando a zero:

$$\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial u}(t_i, x_i, u_i) + \psi_{i+1} = 0 \Longleftrightarrow \psi_{i+1} = -\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial u}(t_i, x_i, u_i) \tag{2.3.21}$$

Pelo sistema adjunto temos:

$$\psi_i = \lambda_0 \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t_i, x_i, u_i)\Delta t - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \tag{2.3.22}$$

Já demonstrámos anteriormente que não existem extremais anormais para o Problema discreto do Cálculo das Variações. Portanto $\lambda_0 \neq 0$. A partir de (2.3.21) e de (2.3.22), uma condição necessária para existir extremo é o facto de x_i, $i = 0, \ldots, N-2$, ter de satisfazer a seguinte equação de diferenças:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t_{i+1}, x_{i+1}, u_{i+1}) + \frac{\partial L}{\partial u}(t_i, x_i, u_i) = 0 \tag{2.3.23}$$

A equação (2.3.23) é chamada *equação de Lagrange discreta*. Consideremos

$$\frac{\partial L}{\partial u}(t_i, x_i, u_i) = -\frac{\Delta L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t}\right)}{\Delta t} \tag{2.3.24}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t_{i+1}, x_{i+1}, u_{i+1}) = L_x\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)$$

assim a equação (2.3.23) toma a forma da equação (1.2.7).

Pela lei de conservação (2.3.16) e utilizando (2.3.21) vem:

$$\lambda_0 \frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\Big|_{s=0} - \lambda_0 \frac{\partial L}{\partial u}\left(t_i, x_i, u_i\right)\frac{\partial}{\partial s_k}X\left(t_i, x_i, u_i, s\right)\Big|_{s=0} = \text{constante}$$

Utilizando a equação (2.3.24) e a consideração $u_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$ vem:

$$\lambda_0 \frac{\partial}{\partial s_k}\Phi\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right)\Big|_{s=0} + \lambda_0 \frac{\Delta L_{\dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t}\right)}{\Delta t}\frac{\partial}{\partial s_k}X\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, s\right)\Bigg|_{s=0} = \text{constante}$$

para $k = 1, \ldots, r$.

Obtêm-se a lei de conservação (2.2.15). □

2.4 Conclusão

Neste capítulo apresentámos o Teorema de Noether sobre várias perspectivas. Estas vão ser úteis no Capítulo 3.

Capítulo 3

Aplicações do Teorema de Noether na Economia

3.1 Introdução

O grau de desenvolvimento de qualquer área científica pode ser avaliado em função da qualidade e da quantidade da Matemática que a incorpora. Há inclusive áreas da Matemática cuja existência se deve à necessidade que dela outras ciências tiveram para se exprimir. Se, no passado, isto foi evidente com a Física, hoje em dia há outras áreas científicas, entre elas a Economia, em que a simbiose com a Matemática aumenta todos os dias. Diríamos que são ciências que estão a atingir a idade adulta. É esta a visão que temos da evolução do mundo da ciência e é com ela que vamos abordar o próximo capítulo.

É interessante verificar que apesar do Teorema de Noether ter pela primeira vez aparecido aplicado à Física, pode, como veremos, ser igualmente aplicado à Economia.

Vamos abordar as aplicações económicas seguindo duas vertentes: os problemas económicos relacionados com o Cálculo das Variações e os problemas económicos relacionados com o Controlo Óptimo.

Uma vez que somos leigos em Economia e para evitar interpretações e erros de tradução, as palavras técnicas que utilizaremos terão a sua versão original escrita em rodapé.

3.2 Problemas do Cálculo das Variações

3.2.1 Problema 1

O modelo usual de maximização do valor descontado da utilidade social[1] é representado por:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t} M\left(k(t), \dot{k}(t)\right) dt \to \max, \quad \rho > 0 \tag{3.2.1}$$

onde M satisfaz as condições necessárias de maximização. Este modelo é o mais popular em Economia. Inclui várias perspectivas, tais como:

1. O modelo neo-clássico geral do crescimento óptimo[2] onde:

$$M\left(k(t), \dot{k}(t)\right) = G\left(u(t)\right)$$

e

$$u\left(t\right) = f\left(x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right)$$

onde $G(u(t))$ é a função de bem-estar social instantânea de uma dada economia,[3] $u(t)$ é o consumo per capita no período t, x é o capital "per capita"e f é a função de transformação.

2. A teoria geral do investimento toma a forma:

$$M\left(k\left(t\right), \dot{k}\left(t\right)\right) = pQ\left(L\left(t\right), K\left(t\right)\right) - WL\left(t\right) - \phi\left(\dot{K}(t), K\right)$$

[1] discounted present value of welfare

[2] The general neo-classical optimal growth model

[3] welfare function

onde p é o preço final Q,[4] L é o trabalho, K é o capital, W é a taxa de salário[5] e ϕ é a função ajustamento.[6]

3. O modelo da teoria endógena de evolução técnica[7] tem um aspecto semelhante à equação da Teoria geral do investimento. Assim temos:

$$M\left(k\left(t\right),\dot{k}\left(t\right)\right)=P\left(Q\right)Q-C\left(Q,A\right)-\theta\left(Q,A,\dot{A},B,\dot{B}\right)-\pi\left(Q,A,\dot{A},B,\dot{B}\right)$$

onde p é o preço final Q,[8] C é a função custo,[9] A são os valores de conhecimento aplicado,[10] B são os valores de conhecimento básico ou de procura,[11] θ é a despesa de I&D aplicada[12] e π é a despesa de I&D fundamental.[13]

Uma das mais importantes leis de conservação escondidas no modelo de crescimento neoclássico é a lei de conservação de renda estável,[14] descoberta por Weitzman (1976). Esta lei foi redescoberta por Samuelson (1982), Kemp e Long (1982) e Sato (1982). Este último, apresentou, pela primeira vez, o modelo como um caso especial do Teorema de Noether.

Nesta dissertação iremos debruçar-nos sobre a primeira perspectiva, *o modelo neoclássico geral do crescimento óptimo*[15] que é representado por:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}G\left(f\left(x\left(t\right),\dot{x}\left(t\right)\right)\right)dt, \quad \rho>0\rightarrow\max \tag{3.2.2}$$

onde ρ é a taxa de desconto intertemporal. Se ρ for igual a zero, isso significa que as utilidades presente e futura são igualmente importantes no bem-estar social intertemporal. Em

[4] price of output Q
[5] wage rate
[6] the adjustment function
[7] The model of endogenous theory of technical change
[8] price of output Q
[9] cost function
[10] stock of applied knowledge
[11] stock of basic knowledge or (research)
[12] R&D expenditure for applied research
[13] R&D expenditure for basic research
[14] income-wealth conservation law
[15] The general neo-classical optimal growth model

contrapartida, um valor de ρ positivo traduz uma certa impaciência, a utilidade presente é mais importante que a utilidade futura.

O grupo de Lie que mantém invariante o modelo (3.2.2) pode ser expandido em série de Taylor sobre $s = 0$ e toma a forma:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + T\left(t, x\left(t\right)\right) s_k + o\left(s_k\right) \\ \bar{x}^i\left(t\right) &= x^i\left(t\right) + X_k^i\left(t, x^i\left(t\right)\right) s_k + o\left(s_k\right), \quad i = 1, \ldots, n \quad e \quad k = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Aplicando a transformação infinitesimal (3.2.3) em (3.2.2) e usando a equação de invariância (2.2.6) obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial t} T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\frac{dX_k}{dt} - \dot{x}\frac{dT}{dt}\right) + L\frac{dT_k}{dt} = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}$$

onde

$$\begin{aligned} &L\left(t, x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right) = e^{-\rho t} G\left(f\left(x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right)\right) \\ &\frac{\partial L}{\partial t} = -\rho e^{-\rho t} G \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = e^{-\rho t}\frac{\partial G}{\partial x} \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{-\rho t}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \end{aligned}$$

Assim a equação toma a forma

$$e^{-\rho t}\left[-\rho G T + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \cdot \left(\frac{dX_k}{dt} - \dot{x}\frac{dT}{dt}\right) + G\frac{dT}{dt}\right] = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}. \tag{3.2.4}$$

Proposição 1. *As transformações infinitesimais:*

$$\begin{aligned} &T = 1, \\ &X_k^i = 0 \quad i = 1, \ldots, n \\ &\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = -\rho e^{-\rho t} U \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

são solução da equação (3.2.4). *Desta solução somos levados à lei de conservação do crescimento neoclássico:*[16]

$$G - \dot{x}\left(t\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{x}\left(t\right)} = \rho \int_t^{\infty} e^{-\rho(m-t)} G\left(m\right) dm = constante \tag{3.2.6}$$

[16] income-wealth conservation law (Weitzman)

Demonstração. Utilizando o Teorema de Noether (2.2.10) e a transformação infinitesimal, temos:

$$e^{-\rho t}\left[G - \dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right] - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \text{constante}$$

Derivando em ordem a t:

$$\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left[e^{-\rho t}\left(G - \dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\right] \tag{3.2.7}$$

Igualando (3.2.5) a (3.2.7) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\rho t}\left(G - \dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\right] = -\rho e^{-\rho t} G$$

Assim:

$$e^{-\rho t}\left(G - \dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right) = \rho\int_t^{\infty} e^{-\rho m} G\left(m\right) dm \tag{3.2.8}$$

Observação 16.

$$\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = -\rho e^{-\rho t} G \Rightarrow \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \int_t^{\infty} -\rho e^{-\rho m} G dm$$

Como $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s_k=0} = P(\infty) - P(t)$, sendo P a primitiva, $P(\infty) = 0$ porque a primitiva de uma exponencial quando $m \to \infty$ é zero, vem:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \rho\int_t^{\infty} e^{-\rho m} G\left(m\right) dm$$

Multiplicando a equação (3.2.8) por $e^{\rho t}$, vem:

$$G(t) - \dot{x}\cdot\frac{\partial G(t)}{\partial \dot{x}(t)} = \rho\int_t^{\infty} e^{-\rho(m-t)} G\left(m\right) dm$$

Chegamos à lei de conservação do crescimento neoclássico (3.2.6). □

Observação 17. A expressão $G(t) - \dot{x}\left(t\right)\cdot\frac{\partial G(t)}{\partial \dot{x}(t)}$ é traduzida, economicamente, por "renda"[17] e a expressão $\int_t^{\infty} e^{-\rho(m-t)} G\left(m\right) dm$ é traduzida, economicamente por "bem-estar".[18] Assim a lei de conservação (3.2.6) toma a forma:

"renda" - ρ"bem-estar"= constante

[17] income

[18] wealth

Alternativamente escrevemos (3.2.6) como

$$e^{-\rho t}\left(G(t)-\dot{x}(t)\cdot\frac{\partial G(t)}{\partial \dot{x}(t)}\right)+\rho\int_0^t e^{-\rho m}G(m)\,dm=\rho\int_0^\infty e^{-\rho m}G(m)\,dm=constante \tag{3.2.9}$$

Observação 18. Economicamente, a expressão $e^{-\rho t}\left(G(t)-\dot{x}(t)\cdot\frac{\partial G(t)}{\partial \dot{x}(t)}\right)$ é interpretada por renda descontada[19] e a expressão $\int_0^t e^{-\rho m}G(m)\,dm$ é interpretada por "stock" de consumo descontado.[20] A Lei da Conservação da Teoria Neoclássica do Investimento é dada por:

$$\text{"renda descontada"}+\rho\text{"stock de consumo descontado"}=\text{constante}$$

A expressão $\int_0^\infty e^{-\rho m}G(m)\,dm$ é interpretada por stock de consumo máximo descontado[21]. A Lei da Conservação da Teoria Endógena da Evolução Técnica é dada por:

$$\rho\text{"stock máximo descontado pelo consumo"}=\text{constante}$$

3.2.2 Problema 2

Samuelson (1982) considerou a Lei de Conservação do Crescimento Neoclássico (3.2.6) mas, considerou também, a taxa de desconto a variar com o tempo. Assim:

$$\text{renda}=\rho(t)\,\text{bem-estar}$$

Depois de termos visto o modelo (3.2.2) onde ρ é fixo, vamos ver o modelo para ρ, taxa de desconto, variável.

O modelo de taxa de desconto variável é representado por:

$$\int_0^\infty e^{-\rho(t)}G(f(x(t),\dot{x}(t)))\,dt\rightarrow\max \tag{3.2.10}$$

[19] discounted income

[20] discounted stock of consumption

[21] maximum discounted stock of consumption

onde $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = e^{-\rho(t)} G\left(f\left(x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right)\right)$ e $G \in C^2$. O grupo de Lie que mantém (3.2.10) invariante pode ser expandido em série de Taylor sobre $s = 0$ e toma a forma:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + T\left(t, x\left(t\right)\right) s_k + o\left(s_k\right) \\ \bar{x}^i\left(t\right) &= x^i\left(t\right) + X_k^i\left(t, x^i\left(t\right)\right) s_k + o\left(s_k\right), \quad i = 1, \ldots, n \quad e \quad k = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Aplicando a transformação infinitesimal (3.2.11) em (3.2.10) e usando a equação de invariância, também referida anteriormente como condição necessária e suficiente, é da forma:

$$\frac{\partial L}{\partial t} T_k + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\frac{dX_k}{dt} - \dot{x} \frac{dT}{dt} \right) + L \frac{dT_k}{dt} = \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial s_k} \right|_{s=0}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{d\rho}{dt} e^{-\rho(t)} G \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= e^{-\rho(t)} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= e^{-\rho(t)} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \end{aligned}$$

Assim a equação toma a forma:

$$e^{-\rho(t)} \left[-\frac{d\rho}{dt} GT + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot X_k + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \cdot \left(\frac{dX_k}{dt} - \dot{x} \frac{dT}{dt} \right) + G \frac{dT}{dt} \right] = \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial s_k} \right|_{s=0} \tag{3.2.12}$$

Observação 19. Salientamos que se $\frac{d\rho}{dt} = \rho = constante$, $T = 1$ e $X = 0$, obtemos a Lei de Conservação (3.2.6).

Como $\frac{d\rho}{dt}$ não é necessariamente constante vem:

Proposição 2. *As transformações infinitesimais:*

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} \text{ não é necessariamente constante} \\ &T = 1 \\ &X_k^i = 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial s_k} \right|_{s=0} = -\frac{d\rho}{dt} e^{-\rho(t)} G \tag{3.2.13}$$

são solução da equação (3.2.12). *Desta solução somos levados à Lei de Conservação :*

$$L - \dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \int_t^\infty \rho'\left(m\right) e^{-\rho(m)} G\left(f\left(x\left(m\right), \dot{x}\left(m\right)\right)\right) dm = constante$$

Utilizando o Teorema de Noether (2.2.10) e a transformação infinitesimal, temos:

$$e^{-\rho(t)}\left[G-\dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}+\right]-\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s_k=0}=\text{constante}$$

É equivalente a

$$e^{-\rho(t)}\left[G-\dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right]=\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}$$

Derivando em ordem a t:

$$\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right|_{s=0}=\frac{d}{dt}\left[e^{-\rho(t)}\left(G-\dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\right] \tag{3.2.14}$$

Igualando (3.2.13) a (3.2.14) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\rho(t)}\left(G-\dot{x}\cdot\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\right]=-\frac{d\rho}{dt}e^{-\rho(t)}G$$

É equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(L-\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial t}$$

Integrando ambas as expressões:

$$L-\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-\int_t^{\infty}\frac{\partial L}{\partial t}dm=\int_t^{\infty}\rho'(m)\,e^{-\rho(m)}G\left(f\left(x\left(m\right),\dot{x}\left(m\right)\right)\right)dm$$

Observação 20. Como $L-\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=P(\infty)-P(t)$, sendo P a primitiva, $P(\infty)=0$ porque a primitiva de uma exponencial quando $m\to\infty$ é zero, vem:

$$L-\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\int_t^{\infty}\rho'(m)\,e^{-\rho(m)}G\left(f\left(x\left(m\right),\dot{x}\left(m\right)\right)\right)dm$$

A expressão $L-\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ é interpretada economicamente por medida utilizada para a renda generalizada.[22]

A expressão $\int_t^{\infty}\rho'(m)\,e^{-\rho(m)}G\left(f\left(x\left(m\right),\dot{x}\left(m\right)\right)\right)dm$ é interpretada economicamente por medida utilizada para o bem-estar geral.[23]

Relativamente aos modelos discretos, falaremos na conclusão deste capítulo.

[22] utility measure of generalized income

[23] utility measure of generalized wealth

3.3 Problemas do Controlo Óptimo

3.3.1 Problema 1

Consideremos o problema (3.2.1) que maximiza o bem-estar social segundo um dado consumo durante um período [0,T],

$$\int_0^T G\left(u\left(t\right)\right)dt \to \max$$

onde $\rho = 0$ significa que as utilidades presente e futura são igualmente importantes no bem-estar social e u é o consumo *per capita* no período t e G é a função do bem-estar social de uma dada economia.

A evolução de *stock* de capital, sistema dinâmico, é dada por:

$$\dot{x}\left(t\right) = f\left(x\left(t\right)\right) - \delta x\left(t\right) - u\left(t\right)$$

onde x é a intensidade de capitalização, f função de produção *per capita* e δ é a taxa de depreciação do *stock* de capital. Como a produção se pode destinar ao consumo ou ao investimento então $\dot{x}\left(t\right) = I(t)$.

O grupo de Lie uni-paramétrico h^s

$$T = t + s \quad e \quad X = x\,,$$

agindo em $\mathbb{R}^2$, é uma simetria do problema autónomo.

A Lei de Conservação para este problema é o Hamiltoniano H constante ao longo do caminho óptimo.

3.3.2 Problema 2

Consideremos agora o crescimento óptimo de dimensão n

Consideramos $(n+1)$ sectores de economia. O sector 0 significa o consumo. Para $i > 0$, o sector i representa estruturas, capital humano, instrumentos, etc...

Seja $k^{i,j}$ compartilhada pelo *Stock* de capital x^j e aplicada no sector i; $\forall j$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} k^{i,j} = 1$ e $k^{i,j} \geq 0$.

Seja δ^i a taxa de depreciação do *stock* x^i. A acumulação de capital verifica $\forall i > 0$,

$$\dot{x}^i = f^i\left(k^{i,1}x^1; \ldots; k^{i,n}x^n\right) - \delta^i x^i$$

O consumo é dado por:

$$u = f^0\left(k^{0,1}x^1; \ldots; k^{0,n}x^n\right)$$

O problema de crescimento óptimo que maximiza o bem-estar social instantâneo é dado por

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{u^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt \to \max$$

onde $\rho > 0$ é a taxa de desconto intertemporal e σ é a elasticidade da utilidade marginal. A função utilidade $G = \frac{u^{1-\sigma}}{1-\sigma}$.

Seja $H(t; x^i; k^{i,j}; \psi^i)$ o Hamiltoniano deste problema. Parametrizando o tempo, obtemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{u^{1-\sigma}}{1-\sigma}\frac{dt}{dz}dz \to \max, \quad \forall i > 0$$

$$\frac{dx^i}{dz} = \frac{dt}{dz}\left[f\left(k^{i,j}x^j\right) - \delta^i x^i\right], \quad \frac{dt}{dz} = v \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$$

Considere-se o grupo de Lie uni-paramétrico h^s definido por

$$h^s\left(t, x^i\right) = \left(t + s, e^{\frac{\rho s}{(1-\sigma)}}x^i\right).$$

Tomando $v_s = v$ e $\forall i$, $k^{(i,j),s} = k^{i,j}$, o grupo h^s é uma simetria para o problema. Obtemos então a seguinte lei de conservação:

$$-H + \frac{\rho}{1-\sigma}\sum_{i=1}^{n} x^i\psi^i \quad \text{é constante ao longo dos caminhos óptimos.}$$

Relativamente aos modelos discretos, podemos afirmar que embora tenhamos encontrado alguns exemplos de leis de conservação discretas na literatura da Economia, elas não provêm do Teorema de Noether.

3.4 Conclusão

Vimos neste capítulo aplicações do Teorema de Noether quer para o Cálculo das Variações quer para o Controlo Óptimo. No entanto, essas aplicações foram vistas apenas para o caso contínuo porque, para o caso discreto, não encontrámos, na nossa pesquisa, aplicações do Teorema de Noether, nem para o Cálculo das Variações, nem para o Controlo Óptimo. No entanto, encontrámos em [12] um exemplo de uma lei de conservação não-Noetheriana. Em [12] mostra-se o seguinte:

Seja t o tempo discreto, $t = 0, 1, 2, \ldots$ e seja $q_t = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ o trabalho elaborado em cada espaço de tempo. O problema de maximizar o bem-estar social é dado por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} (1+\delta)^{-t} G_t = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^{-t} G_t \rightarrow \max, \quad \lambda = 1 + \delta \tag{3.4.1}$$

onde $\delta \geq 0$ é a taxa de desconto fixa e $G_t = G(q_t, q_{t+1})$ é a função de bem-estar social de classe C^2, satisfazendo as condições necessárias.
O caminho óptimo gerado por (3.4.1) assume que existe uma solução de equilíbrio q^*, e por outro lado, leva-nos a considerar leis de conservação locais que operam perto do ponto de equilíbrio, $q_t - q^*$.
Consideremos (q_t, q_{t+1}) contido num conjunto convexo, admissível e o ponto de equilíbrio q^* admitido no domínio. A função G assume-se como estritamente côncava e a matriz Hessiana, no ponto de equilíbrio, é negativa.

Seja $v_t = q_{t+1} - q_t$. Em termos de notação, utilizaremos q_t em vez de $q_t - q^*$ e v_t em vez de $q_{t+1} - q_t$. Assim, o problema (3.4.1) toma o aspecto seguinte:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^{-t} G_t(q_t, v_t) \rightarrow \max, \quad G_t = \frac{v' B_0 v}{2} + v' C_0 q + \frac{q' D_0 q}{2} \tag{3.4.2}$$

onde B_0 e D_0 são matrizes simétricas e B_0 e $B_0 - C_0$ são matrizes não singulares. Os elementos B_0, C_0 e D_0 são obtidas da função (3.4.1), no ponto (q^*, q^*), definidos por:

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \frac{\partial^2 G}{\partial q^i_{t+1} \partial q^j_{t+1}} (q^*, q^*) \\
c_{ij} &= b_{ij} + \frac{\partial^2 G}{\partial q^i_{t+1} \partial q^j_{t}} (q^*, q^*) \\
d_{ij} &= c_{ij} + \frac{\partial^2 G}{\partial q^j_{t+1} \partial q^i_{t}} (q^*, q^*) + \frac{\partial^2 G}{\partial q^i_{t} \partial q^j_{t}} (q^*, q^*)
\end{aligned}$$

Vamos tornar a função $\lambda^{-t} G_t$ independente de t introduzindo uma nova variável Q a substituir q.

$$Q_t = \lambda^{-\frac{t}{2}} q_t \tag{3.4.3}$$

e também V_t é dada por:

$$V_t = Q_{t+1} - Q_t = \lambda^{-\frac{t}{2}} \left[\lambda^{-\frac{t}{2}} v_t + \left(\lambda^{-\frac{t}{2}} - 1 \right) q_t \right] \tag{3.4.4}$$

Então a função de bem-estar torna-se uma função homogénea, quadrática em Q e V:

$$\lambda^{-t} G = \tilde{G} = \frac{V' B V}{2} + V' C Q + \frac{Q' D Q}{2} \tag{3.4.5}$$

onde

$$\begin{aligned}
B &= \lambda B_0 \\
C &= \left(\lambda - \lambda^{\frac{1}{2}} \right) B_0 + \lambda^{\frac{1}{2}} C \\
D &= \left(\lambda^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 B_0 + \left(\lambda^{\frac{1}{2}} - 1 \right) (C_0 + C_0') + D_0
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange discreta é transformada no sistema Hamiltoniano pela transformação de Legendre. Se introduzirmos o preço P conjugado com V,

$$P_{t+1} = \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial V} = B V_t + C Q_t \,, \tag{3.4.6}$$

então a equação de Euler-Lagrange poderá ser escrita como um sistema linear em (Q, P). Em [12] estuda-se o problema perto do ponto de equilíbrio. Depois de alguns cálculos, os autores obtêm a equação linear no formalismo Hamiltoniano:

$$X_{t+1} = A X_t$$

onde

$$A=\left[\begin{array}{cc} -\left(B-C'\right)^{-1} & 1 \\ -B\left(B-C'\right)^{-1} & C \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} C-D & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x'=(Q_1,\ldots,Q_n,P_1,\ldots,P_n)$ e a matriz A é chamada a matriz simplética, isto é, satisfaz:

$$A'JA=J$$

onde

$$J=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right]$$

Para conseguirmos obter a Lei de Conservação, temos de obter o primeiro integral:

$$f_s\left(x\right)=\frac{x'Sx}{2},\quad S'=S$$

tal que satisfaça a condição:

$$f_s\left(x_{t+1}\right)=f_s\left(x_t\right),\quad \text{para todo o } t$$

Combinando (3.4.3), (3.4.4) e (3.4.6) obtemos a transformação relativamente a (Q,P) com (q,v) ou com (q_t,q_{t+1}):

$$\left[\begin{array}{c} Q \\ P \end{array}\right]=\lambda^{-\frac{t}{2}}T\left[\begin{array}{c} q \\ v \end{array}\right]$$

onde

$$T=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ (C-D)+\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}-1\right)\left(B-C'\right) & \lambda^{-\frac{1}{2}}\left(B-C'\right) \end{array}\right]$$

ou

$$\left[\begin{array}{c} Q_t \\ P_t \end{array}\right]=\lambda^{-\frac{t}{2}}\tilde{T}\left[\begin{array}{c} q_t \\ \lambda^{-\frac{t}{2}}q_{t+1} \end{array}\right]$$

onde

$$\tilde{T}=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ (C-D)-\left(B-C'\right) & \left(B-C'\right) \end{array}\right]$$

Calculando $T'JAT$ e exprimindo os elementos em termos de B_0, C_0 e D_0 temos:

$$T'JAT=\lambda^{-\frac{t}{2}}\left[\begin{array}{cc} \lambda C_0-C_0'+D_0 & \lambda B_0-C_0'+D_0 \\ -B_0+C_0 & -B_0+C_0 \end{array}\right]$$

Por [12] temos que a aplicação linear:

$$\sigma(A) = \frac{\left[JA + (JA)'\right]}{2}$$

onde

$$T'\sigma(A)T = \frac{\left[T'JAT + (T'JAT)'\right]}{2}$$

Considerando o primeiro integral $\lambda f_\sigma(A) = I$, com I polinomial quadrático. A lei de conservação do sistema é dada por:

$$I = \lambda^{-t}\left[\frac{v'(-B_0 + C_0)v}{2} + \frac{v'((\lambda - 1)B_0 + D_0)q}{2} + \frac{q'((\lambda - 1)C_0 + D_0)q}{2}\right]$$

Esta equação pode ser expressa usando o Lagrangeano definido em (3.4.2):

$$I = \lambda^{-t}\left[-\left(v'\frac{\partial G}{\partial v} - G\right) + \frac{1}{2}v'\frac{\partial G}{\partial q} + \frac{(\lambda - 1)}{2}q'\frac{\partial G}{\partial v}\right]$$

A Lei de Conservação I, conforme explicado em [12], não pode ser obtida pelo Teorema de Noether.

Conclusão

Ao preparar esta dissertação tivemos como objectivo último mostrar a aplicação do Teorema de Noether em problemas de Economia. Achamos que não fazia sentido falar da aplicação do Teorema de Noether à Economia sem enunciar e explicar previamente o Teorema de Noether. E andando para trás, pensamos que não fazia sentido introduzir o Teorema de Noether sem dar ao leitor algumas noções fundamentais sobre o Cálculo das Variações e o Controlo Óptimo.

Assim, iniciámos a dissertação situando historicamente o Cálculo das Variações e o Controlo Óptimo e resumindo a biografia de Emmy Noether, a nossa heroína.

Como é indispensável saber algo de Cálculo das Variações e de Controlo Óptimo para apreciar o Teorema de Noether, abordámo-los brevemente no primeiro capítulo. Iniciámos esta primeira parte com os conteúdos mais importantes do Cálculo das Variações, caso contínuo: o problema fundamental do Cálculo das Variações contínuo, o Lema de Lagrange, a Equação de Euler-Lagrange e a definição de extremal. De seguida passámos aos conteúdos do Cálculo das Variações, caso discreto: o problema fundamental do Cálculo das Variações discreto e a equação de Euler-Lagrange discreta. Depois abordámos o Controlo Óptimo contínuo, mais concretamente: o problema fundamental do Controlo Óptimo contínuo, o Princípio do Máximo de Pontryagin e a definição das extremais de Pontryagin. Finalmente, consideramos os conteúdos do Controlo Óptimo discreto: o problema do Controlo Óptimo, a definição de conjunto convexo e de função convexa, o Princípio do Máximo de Pontryagin, a definição de extremal de Pontryagin e o Princípio de Optimalidade da Programação Dinâmica.

No segundo capítulo tratamos do Teorema de Noether. Iniciámos o capítulo introduzindo as noções: de lei de conservação, de lei de conservação da quantidade de movimento e de lei de conservação da energia. Em seguida formulámos o Teorema de Noether no contexto do Cálculo das Variações contínuo, em particular: a definição de primeiro integral e de lei de conservação, a definição de uma família r-paramétrica de transformações em $\mathbb{R}^n$, a definição de funcional quasi-invariante, a condição necessária e suficiente de quasi-invariância e o Teorema de Noether, propriamente dito, quer na sua formulação Lagrangeana quer na sua formulação Hamiltoniana. Em seguida, falámos sobre o Teorema de Noether no contexto do Cálculo das Variações discreto: definição de funcional quasi-invariante, condição necessária e suficiente de quasi-invariância e o Teorema de Noether. De seguida, abordámos o Teorema de Noether no contexto do Controlo Óptimo e iniciámos o caso contínuo com: a definição de uma família de transformações r-paramétrica, definição de funcional quasi-invariante, condição necessária e suficiente de quasi-invariância e o Teorema de Noether. No caso discreto abordámos a definição de funcional quasi-invariante, a condição necessária e suficiente de invariância e o Teorema de Noether.

Depois de termos visto noções básicas sobre o Teorema de Noether, no terceiro capítulo aplicá-mo-las. Começámos com o Cálculo das Variações no caso contínuo tendo apresentado dois problemas idênticos. A única diferença entre os dois problemas, é que no primeiro a variável tempo, t, é fixa, enquanto que no segundo a variável de tempo, t, é variável. Em seguida apresentamos dois problemas no contexto do Controlo Óptimo contínuo: o primeiro problema é unidimensional, enquanto que o segundo tem dimensão n. As aplicações de leis de conservação encontradas na Economia para o caso discreto são mais complicadas do que para o caso contínuo e não fazem uso do Teorema de Noether. Na conclusão do terceiro capítulo mencionamos uma lei de conservação para o caso discreto, tendo-a obtido a partir de cálculos muito elaborados, sem recurso ao Teorema de Noether.

Com este trabalho vi despertar em mim a curiosidade e fiquei motivada para a exploração de diferentes aplicações da Matemática, seja à Economia, seja a um qualquer outro campo porque, como diz Lobatchevsky: *"Não há ramo da Matemática, por abstracto que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenómenos do mundo real."*

Bibliografia

[1] Philippe Askenazy, *Symmetry and optimal control in economics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 282, 2003, pp. 603–613

[2] Bruce Van Brunt, *The Calculus of Variations*,New York, Springer-Verlag, 2004.

[3] Alpha C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization*,McGraw-Hill, 1992.

[4] Ivar Ekeland, *Some Variational Problems Arisig From Mathematical Economics.* Mathematical Economics (Montecatini Terme, 1986), 1–18, Lecture Notes in Math., 1330, Springer, Berlin, 1988.

[5] L. Elsgolts, *Differential Equations and the Calculus of Variations*, MIR, 1997.

[6] Paulo D. F. Gouveia and Delfim F. M. Torres, *Computação Algébrica no Cálculo das Variações: Determinação de Simetrias e Leis de Conservação*, TEMA Tend. Mat. Apl. Comput. Vol. 6, pp. 81–90, 2005.

[7] Daniel Leonard, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, 1992.

[8] J. David Logan, *Applied Mathematics*, John Wiley & Sons New York, 1987.

[9] Cesaltina Pires, *Cálculo para Economistas*, McGraw-Hill, 2001.

[10] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal processes, John Wiley & Sons, 1962.

[11] Ryuzo Sato, *Conservations Laws and Symmetry: Applications to Economics and Finance*, New York University, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[12] Ryuzo Sato, Shigeru Maeda *Conservations Laws in Continuous and Discrete Models*, Conservations Laws and Symmetry, pp. 135–174, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1990.

[13] Gueorgui Smirnov, Vladimir Bushenkov *Curso de Optimização - Programação Matemática, Cálculo de Variações, Controlo Óptimo*, Escolar Editora, Portugal, 2005.

[14] G. L. Thompson, *Optimal Control Theory - Applications to Management Science and Economics*, 2^a edição, Kluwer, 2000.

[15] Delfim F. M. Torres, *Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo*, Dissertação de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2002.

[16] Delfim F. M. Torres, *Integrals of Motion for Discrete-Time Optimal Control Problems*, Control Applications of Optimisation 2003, Editors: R. Bars, E. Gyurkovics, IFAC Workshop Series, Publisher: Pergamon-Elsevier Science, Oxford, England, pp. 33–38, 2003.

[17] Delfim F. M. Torres, *Quasi-Invariant Optimal Control Problems*, PortugaliæMathematica, Vol. 61, Fasc. 1, pp. 97–114, 2004.

[18] Delfim F. M. Torres, *Proper Extensions of Noether's Symmetry Theorem for Nonsmoth Extremals of the Calculus of Variations*, Communications on Pure and Applied Analysis, Volume 3, Nr. 3, pp. 491–500, 2004.

Índice